FUNDAMENTOS DE

CIRCUITOS ELÉTRICOS

Charles K. Alexander
Departamento de Engenharia Elétrica e Computação
Cleveland State University

Matthew N. O. Sadiku
Departamento de Engenharia Elétrica
Prairie View A&M University

Heitor Edus

FUNDAMENTOS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

5ª Edição

Tradução:

José Lucimar do Nascimento
Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações (PUC/MG)
Especialista em Sistemas de Controle (UFMG)
Professor e Coordenador de Ensino do CETEL

Revisão técnica:

Antonio Pertence Júnior
Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações (IPUC/MG)
Mestre em Engenharia pela UFMG
Professor da Universidade FUMEC/MG
Membro da SBMAG (Sociedade Brasileira de Eletromagnetismo)

AMGH Editora Ltda.
2013

Dedicado a nossas esposas, Kikelomo e Hannah,
cuja compreensão e apoio verdadeiramente fizeram
este livro possível.

Matthew e Chuck

Matthew N. O. Sadiku

Matthew N. O. Sadiku é, atualmente, professor da Prairie View A&M University. Antes de passar a trabalhar pela Prairie View, lecionava na Florida Atlantic University, Boca Raton e na Temple University, Filadélfia. Trabalhou também na Lucent/Avaya e na Boeing Satellite Systems.

Sadiku é autor de mais de 170 artigos especializados e mais de 30 livros, entre os quais *Elements of Electromagnetics* (Oxford University Press, 3ª edição, 2001), *Numerical Techniques in Electromagnetics* (2ª edição, CRC Press, 2000), *Simulation of Local Area Networks* (com M. Ilyas, CRC Press, 1994), *Metropolitan Area Networks* (CRC Press, 1994) e *Fundamentals of Electric Circuits* (com C. K. Alexander, McGraw-Hill). Seus livros são usados no mundo todo e alguns deles foram traduzidos para os idiomas coreano, chinês, italiano e espanhol. Recebeu o prêmio McGraw-Hill/Jacob Millman Award, em 2000, por contribuições destacadas no campo da engenharia elétrica. Foi presidente do IEEE Region 2 Student Activities Committee e editor-associado do IEEE Transactions on Education. Obteve seu título de PhD pela Tennessee Technological University, Cookeville.

Prefácio

Você pode estar se perguntando por que escolhemos para a capa desta edição uma foto de um veículo robô para exploração em Marte da NASA. Na verdade, escolhemos por várias razões. Primeiro, o espaço representa a fronteira mais emocionante para todo o mundo! Segundo, a maior parte do veículo robô consiste em diversos tipos de circuitos, que devem trabalhar sem necessidade de manutenção, porque quando o veículo robô estiver em Marte, será difícil encontrar um técnico!

O veículo robô tem um sistema de alimentação que fornece toda a energia necessária para movê-lo, ajudá-lo a recolher amostras e analisá-las, transmitindo os resultados e recebendo instruções da Terra. Uma das questões mais importantes que surge como um problema é o comando do veículo robô que leva cerca de 20 minutos para as comunicações serem transmitidas da Terra para Marte, fazendo que o veículo robô não execute rapidamente mudanças exigidas pela NASA.

O que acho mais incrível é que um dispositivo eletromecânico sofisticado e complicado como esse pode funcionar com tanta precisão e confiabilidade depois de voar milhares de quilômetros e cair saltando no solo, embora envolto em uma estrutura inflada. Você pode ver um vídeo fantástico de uma animação incrível da chegada desse veículo no planeta Marte em: http://www.youtube.com/watch?v=5UmRx4dEdRI. Divirta-se!

Destaques

Novidades desta edição

O Capítulo 13 apresenta um modelo para acoplamento magnético que conduz o estudante a uma análise mais fácil, bem como melhora a sua capacidade de encontrar erros. Utilizamos esse modelo com sucesso há anos e senti que era chegado o momento de adicioná-lo ao livro. Além disso, há mais de 600 novos problemas no final de cada capítulo, que foram editados, bem como os problemas práticos.

Como dito anteriormente, acrescentamos também o uso *MultiSim*™ da National Instruments nas soluções para quase todos os problemas resolvidos com o uso do *PSpice*®. Uma versão limitada do programa *MultiSim*, bem como alguns arquivos para a prática de exercícios, pode ser acessada no *site* da McGraw-Hill (www.mhhe.com/alexander). Os tutoriais do *PSpice*, *MATLAB*® e *KCIDE*, todos em português, estão no *site* do Grupo A.

Adicionamos 43 novos problemas no Capítulo 16, para melhorar o uso das poderosas técnicas de análise no domínio *s* que são usadas para determinar tensões e correntes em circuitos.

O que foi mantido das edições anteriores

Um curso de análise de circuitos talvez seja o primeiro momento em que os estudantes terão contato com a engenharia elétrica. Este também será o momento

em que poderemos melhorar algumas das habilidades que eles necessitarão mais tarde quando aprenderem a projetar circuitos.

Um dos destaques desta edição é a seção de Problemas ao final de cada capítulo, em que constam questões cujo objetivo é estimular os estudantes a **elaborar problemas**. Essas questões foram desenvolvidas para melhorar as competências que representam uma parte importante no processo de projetos de circuitos. Sabemos que em um curso fundamental de circuitos não é possível desenvolver completamente essas habilidades, e que para desenvolvê-las totalmente os estudantes precisam vivenciar os projetos, que é uma atividade normalmente reservada para o seu último ano de curso. Isso não significa que algumas das competências não possam ser desenvolvidas e exercitadas em um curso de circuitos.

Este livro já incluía questões abertas que ajudam os estudantes a usarem a criatividade, essencial no aprendizado de projetos. Queríamos acrescentar muito mais nessa importante área e, por isso, desenvolvemos uma abordagem exatamente com essa finalidade. Quando desenvolvemos problemas para serem resolvidos, o nosso objetivo é que o estudante aprenda mais sobre a teoria e o processo de resolução de problemas. Por que não propor problemas de projeto aos estudantes? Isso é exatamente o que fazemos em cada capítulo. Dentro do conjunto de problemas comuns, temos um conjunto de problemas no qual pedimos ao estudante que elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor um conceito importante. Isso produz dois resultados importantes. O primeiro é uma melhor compreensão da base teórica, e o segundo é o desenvolvimento de algumas habilidades básicas de projeto. Assim, estamos aplicando de forma eficaz o princípio básico de aprender ensinando. *Essencialmente, todos nós aprendemos melhor quando ensinamos um assunto*, e sabemos que a elaboração de problemas eficazes é uma parte fundamental do processo de ensino. Os estudantes também devem ser incentivados a desenvolver problemas, quando apropriado, que tenham resultados significativos e não necessariamente manipulações matemáticas complicadas.

Outra vantagem interessante do nosso livro é que existe um total de 2.447 Exemplos, Problemas práticos, Questões para revisão e Problemas no final dos capítulos. As respostas para todos os Problemas práticos são apresentadas na sequência de seu enunciado em cada capítulo, e as respostas dos Problemas ímpares são apresentadas no Apêndice D.

A metodologia de ensino desta 5ª edição continua sendo a mesma das edições anteriores: apresenta a análise de circuitos de uma forma mais clara, atrativa e fácil de entender que outros livros de circuitos, e ajuda os estudantes a sentirem interesse no estudo de engenharia. Para isso, usamos as seguintes estratégias:

- **Aberturas dos capítulos e resumos**
  Cada capítulo inicia com uma discussão sobre como aperfeiçoar habilidades que contribuam para a resolução bem-sucedida de problemas, bem como para carreiras de sucesso ou, então, por uma orientação vocacional sobre uma subdisciplina da engenharia elétrica. Esta é seguida por uma introdução que associa o capítulo atual com os capítulos anteriores e enumera os objetivos do capítulo. O capítulo se encerra com um resumo dos principais conceitos e fórmulas.
- **Metodologia para a resolução de problemas**
  O Capítulo 1 introduz um método de seis etapas para a resolução de problemas envolvendo circuitos, que é adotado de modo consistente ao longo do livro e em suplementos de outras formas, como mídia, para promover práticas de resolução de problemas bem fundamentadas.

- **Estilo de escrita voltado para o estudante**

  Todos os princípios são apresentados de forma clara, lógica e em passo a passo. Evitamos o máximo possível a prolixidade e o fornecimento de detalhes em excesso que poderiam ocultar conceitos e impedir a compreensão geral do material.

- **Fórmulas em quadros e termos-chave**

  Fórmulas importantes são apresentadas em quadros como maneira de ajudar os estudantes a distinguir o que é essencial daquilo que não é. Da mesma forma, para garantir que eles compreendam claramente o significado do assunto, são definidos e destacados termos-chave.

- **Hipertextos**

  São usados hipertextos como ferramenta pedagógica. Eles atendem a diversos objetivos, como dicas, referências a outros trechos da obra, alertas, lembretes para não cometer certos erros comuns e ideias para a resolução de problemas.

- **Exemplos resolvidos**

  No final de cada seção é fornecida grande quantidade de exemplos detalhadamente resolvidos, que são considerados parte do texto e explicados de forma clara, sem exigir que o leitor deduza etapas faltantes. Esses exemplos dão aos alunos um perfeito entendimento da solução e confiança para resolverem os problemas por si só, e parte deles é resolvida de duas ou três maneiras diferentes.

- **Problemas práticos**

  Para ser mais didático, cada exemplo ilustrativo é seguido imediatamente por um problema prático com a resposta. Os estudantes podem seguir o exemplo, passo a passo, para resolver o problema prático sem ficar vasculhando páginas ou ver as respostas no final do livro. O problema prático também se destina a verificar se os estudantes compreenderam o exemplo precedente e também reforçará o entendimento do material antes que passem para a seção seguinte. As soluções completas para os problemas práticos estão disponíveis no *site* do Grupo A.

- **Seções com aplicações**

  A última seção em cada capítulo é dedicada a aspectos de aplicação prática dos conceitos estudados no capítulo. O material visto é aplicado a pelo menos um ou dois dispositivos ou problemas práticos, ajudando os estudantes a ver como os conceitos são aplicados a situações da vida real.

- **Questões para revisão**

  Dez questões de revisão no formato múltipla escolha são fornecidas no final de cada capítulo com as respectivas respostas. As questões para revisão se destinam a abordar os pequenos "truques" que os exemplos e os problemas talvez não abordem, e servem como dispositivo para autoavaliação e ajudam os estudantes a determinar seu nível de domínio sobre os conceitos apresentados no capítulo.

- **Ferramentas de computador**

  Reconhecendo as exigências da ABET® (Accreditation Board of Engineering and Technology) em relação a ferramentas computacionais integradas, é incentivado o uso do *PSpice*, do *MultiSim*, do *MATLAB* e do *KCIDE for Circuits* em nível facilitado para o estudante. O *PSpice* é abordado logo no início, de modo que os estudantes se familiarizem e usem essa ferramenta ao longo do livro. Os tutoriais sobre esses *softwares*, exceto do *MultSim*,

estão disponíveis no *site* www.grupoa.com.br. O *MATLAB* também é introduzido logo no começo do livro.

- **Problemas voltados para elaboração de problemas**

  Finalmente, os problemas voltados para a *elaboração de problemas* são idealizados para ajudar os estudantes a desenvolverem habilidades que serão necessárias no desenvolvimento de projetos de circuitos.

- **Perfis históricos**

  Perfis históricos concisos ao longo do texto fornecem dados importantes e datas relevantes de personalidades da área para o estudo da engenharia elétrica, como Faraday Ampère, Edison, Henry, Fourier, Volta e Bell.

- **Discussão prévia sobre amplificadores operacionais**

  O amplificador operacional (AOP) como elemento básico é introduzido no início do livro.

- **Discussão sobre transformadas de Fourier e de Laplace**

  Para facilitar a transição entre o curso de Circuitos e os cursos de Sinais e Sistemas, as transformadas de Laplace e de Fourier são analisadas de forma abrangente e clara. Os capítulos são desenvolvidos de tal maneira que o professor interessado possa ir de soluções de circuitos de primeira ordem ao Capítulo 15. Isso possibilitará uma progressão bem natural, da transformada de Laplace à transformada de Fourier até circuitos CA.

- **Exemplos mais detalhados**

  Exemplos resolvidos com grande cuidado, de acordo com o método de resolução de seis etapas, fornecem um guia para os estudantes resolverem problemas de forma consistente. É apresentado pelo menos um exemplo com essa proposta em cada capítulo.

- **Aberturas de capítulo com EC 2000**

  Fundamentado no novo Critério 3 da ABET, com base em habilidades, as aberturas dos capítulos são dedicadas a discussões sobre como os estudantes poderão adquirir as habilidades necessárias que os levarão a uma carreira brilhante de engenheiro. Como essas habilidades e esses conhecimentos são muito importantes para o estudante durante o curso superior, assim como em sua carreira, usamos o título: *Progresso profissional*.

- **Problemas como lição de casa**

  Mais de 300 novos problemas de final de capítulo dão aos estudantes excelente oportunidade de prática, assim como de reforço de conceitos fundamentais.

- **Ícones para identificação de problemas como lição de casa**

  São usados ícones para destacar problemas relacionados com projeto de engenharia, bem como problemas que podem ser solucionados por meio do *PSpice*, *MultiSim*, *KCIDE* ou *MATLAB*.

Aplicações práticas

A seguir, apresentamos uma amostra das aplicações encontradas neste livro:

- Bateria recarregável de lanterna (Problema 1.11)
- Custo do consumo de uma torradeira (Problema 1.25)
- Potenciômetro (Seção 2.8)
- Projeto de um sistema de iluminação (Problema 2.61)
- Leitura de um voltímetro (Problema 2.66)
- Controle de velocidade de um motor (Problema 2.74)

- Apontador de lápis elétrico (Problema 2.79)
- Cálculo da tensão de um transistor (Problema 3.86)
- Modelo de um transdutor (Problema 4.87)
- Medidor de deformação (*strain gauge*) (Problema 4.90)
- Ponte de Weatstone (Problema 4.91)
- Projeto de um DAC de 6 bits (Problema 5.83)
- Amplificador de instrumentação (Problema 5.88)
- Projeto de um circuito de computador analógico (Exemplo 6.15)
- Projeto de um circuito com AOP (Problema 6.71)
- Projeto de um computador analógico para resolver equação diferencial (Problema 6.79)
- Subestação de energia elétrica – banco de capacitores (Problema 6.83)
- Flash eletrônico para câmeras fotográficas (Seção 7.9)
- Circuito para ignição de automóveis (Seção 7.9)
- Máquina de soldar (Problema 7.86)
- Acionador de *airbag* (Problema 8.78)
- Modelo elétrico de funções corpóreas – estudo de convulsões (Problema 8.82)
- Sensor eletrônico industrial (Problema 9.87)
- Sistema de transmissão de energia (Problema 9.93)
- Projeto de um oscilador Colpitts (Problema 10.94)
- Circuito amplificador estéreo (Problema 13.85)
- Circuito girador (*gyrator*) (Problema 16.62)
- Cálculo de número de estações permitidas na faixa de transmissão AM (Problema 18.63)
- Sinal de voz – taxa de Nyquist (Problema 18.65)

Organização

Este livro foi escrito para um curso de Análise de Circuitos Lineares com duração de dois semestres ou três bimestres, ou para um curso de um semestre usando uma seleção adequada de capítulos e seções feita pelo professor. O livro é dividido em três grandes partes:

- A **Parte 1**, constituída pelos Capítulos de 1 a 8, é destinada a circuitos de corrente contínua (CC). Ela abrange as leis e teoremas fundamentais, técnicas de análise de circuitos, assim como elementos ativos e passivos.
- A **Parte 2**, contendo os Capítulos de 9 a 14, trata de circuitos de corrente alternada (CA). Ela introduz fasores, análise em regime estacionário senoidal, energia elétrica CA, valor eficaz, sistemas trifásicos e resposta de frequência.
- A **Parte 3**, formada pelos Capítulos de 15 a 19, é dedicada a técnicas avançadas para análise de circuitos. Essa parte fornece aos estudantes uma introdução sólida à transformada de Laplace, séries de Fourier, transformada de Fourier e análise de circuitos de duas portas.

O material contido nas três partes é mais que suficiente para um curso de dois semestres e, portanto, o professor deve selecionar os capítulos e as seções que serão estudados. As seções identificadas com o símbolo de uma adaga (†) podem ser suprimidas, explicadas de forma breve ou dadas como lição de casa,

pois podem ser omitidas sem perda de continuidade. O professor também pode escolher alguns exemplos, alguns problemas e algumas seções para abordar em sala de aula ou para dar como lição de casa. Como já afirmado anteriormente, utilizamos três ícones nesta edição. Usamos o ícone do *PSpice* () para indicar problemas que requerem o seu uso no processo de resolução, nos quais a complexidade do circuito é tal que essa ferramenta tornaria o processo de solução muito mais fácil, ou então, serve para verificar se o problema foi resolvido corretamente. Empregamos o ícone do *MATLAB* () para denotar problemas nos quais é exigido o seu uso no processo de resolução, o qual faz sentido em virtude da constituição e complexidade do problema ou, então, serve como ferramenta de conferência para a solução encontrada por outro método. Finalmente, usamos o ícone de projeto () para identificar problemas que ajudam o estudante a desenvolver habilidades e conhecimentos necessários para projetos de engenharia. Problemas com maior grau de dificuldade são assinalados com um asterisco (*).

São apresentados problemas abrangentes após os problemas no final de cada capítulo. Eles são, em sua maioria, problemas aplicativos que exigem conhecimentos adquiridos naquele capítulo em particular.

Pré-requisitos

Como acontece com a maioria dos cursos introdutórios sobre circuitos, os principais pré-requisitos para um curso que adote este texto são a física e o cálculo. Alguma familiaridade com números complexos é útil na parte final do livro, porém, não exigida. Uma grande vantagem deste livro é que TODAS as equações matemáticas e TODOS os fundamentos de física, que serão necessários para o estudante, estão inclusos no texto.

Material de apoio

Knowledge Capturing Integrated Design Environment for Circuits (*KCIDE for Circuits*)

Esse *software*, desenvolvido pela Cleveland State University e financiado pela NASA, foi projetado para ajudar os estudantes a resolverem problemas com circuitos de forma organizada e usando a metodologia de seis etapas de resolução de problemas do livro. O *KCIDE for Circuits* possibilita aos estudantes resolverem um problema de circuitos no *PSpice* e *MATLAB*, acompanharem a evolução de sua resolução e salvarem um registro de seu processo para referência futura. Além disso, o *software* gera, automaticamente, um documento Word e/ou apresentação em PowerPoint. Esse *software* pode ser baixado livremente.

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nosso apreço pelo apoio amoroso que recebemos de nossas esposas (Hannah e Kikelomo), nossas filhas (Christina, Tamara, Jennifer, Motunrayo, Ann e Joyce), filho (Baixi) e dos membros de nossa família. Gostaríamos de agradecer ainda Baixi (agora Dr. Baixi Su Alexander) por sua ajuda em problemas de verificação para maior clareza e precisão.

Na McGraw-Hill, gostaríamos de agradecer a equipe editorial e de produção: Raghu Srinivasan, editor-sênior; Lora Kalb-Neyens, editora de desenvolvimento; Joyce Watters, gerente de projeto; e Margarite Reynolds, *designer*.

A 5ª edição foi muito beneficiada com o excelente trabalho de muitos revisores e dos participantes do simpósio que contribuíram para o sucesso das quatro primeiras edições! Além deles, as pessoas a seguir fizeram importantes contribuições para esta edição (em ordem alfabética):

Alok Berry, *George Mason University*

Anton Kruger, *University of Iowa*

Archie Holmes, *University of Virginia*

Arnost Neugroschel, *University of Florida*

Arun Ravindran, *University of North Carolina-Charlotte*

Vahe Caliskan, *University of Illinois-Chicago*

Finalmente, agradecemos o retorno recebido dos professores e alunos que usaram as edições anteriores. Queremos que isso continue. Assim, solicitamos que continuem nos enviando e-mails ou encaminhando-os ao editor. Podem nos contatar em c.alexander@ieee.org (Charles Alexander) e sadiku@ieee.org (Matthew Sadiku).

C. K. Alexander
M. N. O. Sadiku

Nota ao estudante

Talvez este seja seu primeiro curso de engenharia elétrica. Embora seja uma disciplina fascinante e desafiadora, o curso pode lhe causar certa intimidação. E, por isso, este livro foi escrito: para poder impedir isso. Um bom livro-texto e um bom professor são uma vantagem – mas o aprendizado depende de você. Tendo essas ideias em mente, certamente você se dará bem em seu curso.

- O presente curso é a base sobre a qual se apoia a maioria dos demais cursos do currículo de engenharia elétrica. Por essa razão, esforce-se o máximo possível. Estude regularmente durante o curso.
- A resolução de problemas é parte essencial do processo de aprendizado. Resolva o maior número possível de problemas. Comece resolvendo o problema prático, que vem logo após cada exemplo e, em seguida, prossiga para os problemas de final de capítulo. A melhor maneira de aprender é resolver um grande número de problemas. O asterisco ao lado do número do problema indica um problema desafiador.
- O *PSpice* e o *MultiSim*, programas de computador para análise de circuitos, são usados ao longo deste livro. O *PSpice* é o programa mais popular para essa análise utilizado na maioria das universidades; o tutorial sobre este programa está disponível como material *online*. Esforce-se para aprendê-los; porque é possível resolver qualquer problema de circuito com eles e, assim, se certificar de que está entregando uma solução correta para o problema.
- *MATLAB* é outro *software* muito útil na análise de circuitos e para os demais cursos que você está fazendo. O tutorial sobre o *MATLAB* também está disponível no *site* www.grupoa.com.br. A melhor maneira de aprendê-lo é começar a usá-lo assim que você conhecer alguns comandos.
- Cada capítulo termina com uma seção sobre como o material visto pode ser aplicado a situações da vida prática. Talvez os conceitos nessa seção possam ser novos e avançados para você. Sem dúvida nenhuma, você aprenderá mais detalhes em outras matérias. Nosso principal interesse aqui é ganhar familiaridade geral com tais ideias.
- Tente resolver as questões de revisão no final de cada capítulo, pois o ajudarão a descobrir alguns "truques" não revelados em sala de aula ou no livro-texto.
- Certamente foi investido um grande esforço para tornar os detalhes técnicos apresentados neste livro fáceis de serem compreendidos. Ele ainda contém todos os conceitos de matemática e física necessários para entender a teoria e será muito útil em outros cursos de engenharia. Entretanto, também nos concentramos na criação de uma referência para você usar tanto na universidade como na vida profissional ou na busca da obtenção de um grau acadêmico.
- É muito tentadora a ideia de vender seu exemplar após ter terminado seu curso; entretanto, recomendamos que você NÃO VENDA SEUS LIVROS

DE ENGENHARIA! Apesar de os livros sempre serem caros, o custo deste livro é praticamente o mesmo que paguei em dólares, pelos meus livros de circuitos no início da década de 1960. Na realidade, ele é realmente mais barato. Isso porque os livros de engenharia do passado não chegam nem perto da abrangência disponível hoje.

Na minha época de estudante, não vendi nenhum dos meus livros didáticos de engenharia e fiquei muito feliz por não ter feito isso! Descobri que precisei da maioria deles ao longo de minha carreira. No Apêndice A, é apresentado um breve resumo sobre resolução de determinantes; no Apêndice B, números complexos; e, no Apêndice C, fórmulas matemáticas. As respostas para os problemas com numeração ímpar são dadas no Apêndice D. Divirta-se!

Charles K. Alexander

Departamento de Engenharia Elétrica e Computação
Cleveland State University

Matthew N. O. Sadiku

Departamento de Engenharia Elétrica
Prairie View A&M University

Sumário

Parte 1 Circuitos CC 2

Capítulo 1 Conceitos básicos 3

1.1 Introdução 4
1.2 Sistemas de unidades 5
1.3 Carga e corrente 5
1.4 Tensão 8
1.5 Potência e energia 9
1.6 Elementos de circuito 12
1.7 †Aplicações 15
1.7.1 Tubo de imagens de TV 15
1.7.2 Contas de consumo de energia elétrica* 16
1.8 †Resolução de problemas 18
1.9 Resumo 21
Questões para revisão 22
Problemas 22
Problemas abrangentes 25

Capítulo 2 Leis básicas 26

2.1 Introdução 27
2.2 Lei de Ohm 27
2.3 †Nós, ramos e laços 32
2.4 Leis de Kirchhoff 34
2.5 Resistores em série e divisão de tensão 39
2.6 Resistores em paralelo e divisão de corrente 40
2.7 †Transformações Y-delta (estrela-triângulo) 46
2.7.1 Conversão delta-Y (triângulo-estrela) 47
2.7.2 Conversão Y-delta 48
2.8 †Aplicações 51
2.8.1 Sistemas de iluminação 52
2.8.2 Projeto de medidores de CC 53
2.9 Resumo 57
Questões para revisão 58
Problemas 59
Problemas abrangentes 68

Capítulo 3 Métodos de análise 70

3.1 Introdução 71
3.2 Análise nodal 71
3.3 Análise nodal com fontes de tensão 77
3.4 Análise de malhas 81
3.5 Análise de malhas com fontes de corrente 85
3.6 †Análises nodal e de malhas por inspeção 88
3.7 Análise nodal *versus* análise de malhas 91
3.8 Análise de circuitos usando o *PSpice* 92
3.9 †Aplicações: circuitos CC transistorizados 94
3.10 Resumo 99
Questões para revisão 99
Problemas 100
Problemas abrangentes 111

Capítulo 4 Teoremas de circuitos 112

4.1 Introdução 113
4.2 Propriedade da linearidade 113
4.3 Superposição 115
4.4 Transformação de fontes 120
4.5 Teorema de Thévenin 122
4.6 Teorema de Norton 128
4.7 †Dedução dos teoremas de Thévenin e de Norton 131
4.8 Máxima transferência de potência 133
4.9 Verificação de teoremas de circuitos usando o *PSpice* 135
4.10 †Aplicações 137
4.10.1 Modelagem de fontes 138
4.10.2 Medida de resistência 140
4.11 Resumo 142
Questões para revisão 143
Problemas 143
Problemas abrangentes 153

Capítulo 5 Amplificadores operacionais 154

5.1 Introdução 155
5.2 Amplificadores operacionais 155
5.3 Amplificador operacional ideal 158
5.4 Amplificador inversor 160
5.5 Amplificador não inversor 162
5.6 Amplificador somador 163
5.7 Amplificador diferencial 165
5.8 Circuitos com amplificadores operacionais em cascata 168
5.9 Análise de circuitos com amplificadores operacionais usando o *PSpice* 171
5.10 †Aplicações 172
5.10.1 Conversor digital-analógico 172
5.10.2 Amplificadores de instrumentação 174
5.11 Resumo 176

Questões para revisão ... 177
Problemas ... 178
Problemas abrangentes ... 188

Capítulo 6 Capacitores e indutores ... 189

6.1 Introdução ... 190
6.2 Capacitores ... 190
6.3 Capacitores em série e em paralelo ... 196
6.4 Indutores ... 199
6.5 Indutores em série e em paralelo ... 203
6.6 †Aplicações ... 206
6.6.1 Integrador ... 206
6.6.2 Diferenciador ... 208
6.6.3 Computador analógico ... 209
6.7 Resumo ... 213
Questões para revisão ... 213
Problemas ... 214
Problemas abrangentes ... 222

Capítulo 7 Circuitos de primeira ordem ... 223

7.1 Introdução ... 224
7.2 Circuitos *RC* sem fonte ... 224
7.3 Circuito *RL* sem fonte ... 229
7.4 Funções de singularidade ... 234
7.5 Resposta a um degrau de um circuito RC ... 241
7.6 Resposta a um degrau de um circuito *RL* ... 247
7.7 †Circuitos de primeira ordem com amplificador operacional ... 252
7.8 Análise de transiente usando o *PSpice* ... 255
7.9 †Aplicações ... 259
7.9.1 Circuitos de retardo ... 259
7.9.2 Flash eletrônico para câmeras fotográficas ... 260
7.9.3 Circuitos a relé ... 262
7.9.4 Circuito para ignição de automóveis ... 263
7.10 Resumo ... 264
Questões para revisão ... 265
Problemas ... 266
Problemas abrangentes ... 275

Capítulo 8 Circuitos de segunda ordem ... 276

8.1 Introdução ... 277
8.2 Determinação dos valores inicial e final ... 277
8.3 Circuito *RLC* em série sem fonte ... 282
8.4 Circuito *RLC* em paralelo sem fonte ... 288
8.5 Resposta a um degrau de um circuito *RLC* em série ... 294
8.6 Resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo ... 299
8.7 Circuitos de segunda ordem gerais ... 301
8.8 Circuitos de segunda ordem contendo amplificadores operacionais ... 306
8.9 Análise de circuitos *RLC* usando o *PSpice* ... 308
8.10 †Dualidade ... 312
8.11 †Aplicações ... 314
8.11.1 Sistema de ignição de automóveis ... 314
8.11.2 Circuitos suavizador ... 316
8.12 Resumo ... 318
Questões para revisão ... 319
Problemas ... 320
Problemas abrangentes ... 327

Parte 2 Circuitos CA 328

Capítulo 9 Senoides e fasores ... 329

9.1 Introdução ... 330
9.2 Senoides ... 331
9.3 Fasores ... 335
9.4 Relações entre fasores para elementos de circuitos ... 343
9.5 Impedância e admitância ... 345
9.6 †As leis de Kirchhoff no domínio da frequência ... 348
9.7 Associações de impedâncias ... 348
9.8 †Aplicações ... 354
9.8.1 Comutadores de fase ... 354
9.8.2 Pontes CA ... 356
9.9 Resumo ... 359
Questões para revisão ... 360
Problemas ... 360
Problemas abrangentes ... 367

Capítulo 10 Análise em regime estacionário senoidal ... 369

10.1 Introdução ... 370
10.2 Análise nodal ... 370
10.3 Análise de malhas ... 373
10.4 Teorema da superposição ... 376
10.5 Transformação de fontes ... 379
10.6 Circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton ... 380
10.7 Circuitos CA com amplificadores operacionais ... 384
10.8 Análise CA usando o *PSpice* ... 386
10.9 †Aplicações ... 389
10.9.1 Multiplicador de capacitância ... 389
10.9.2 Osciladores ... 391
10.10 Resumo ... 393
Questões para revisão ... 394
Problemas ... 395

Capítulo 11 Análise de potência em CA ... 405

11.1 Introdução ... 406
11.2 Potências instantânea e média ... 406
11.3 Máxima transferência de potência média ... 411

11.4 Valor RMS ou eficaz ... 414
11.5 Potência aparente e fator de potência ... 417
11.6 Potência complexa ... 419
11.7 †Conservação de potência CA ... 423
11.8 Correção do fator de potência ... 426
11.9 †Aplicações ... 428
11.9.1 Medição de potência ... 428
11.9.2 Custo do consumo de energia elétrica ... 431
11.10 Resumo ... 433
Questões para revisão ... 434
Problemas ... 435
Problemas abrangentes ... 443

Capítulo 12 Circuitos trifásicos ... 445

12.1 Introdução ... 446
12.2 Tensões trifásicas equilibradas ... 447
12.3 Conexão estrela-estrela equilibrada ... 450
12.4 Conexão estrela-triângulo equilibrada ... 453
12.5 Conexão triângulo-triângulo equilibrada ... 456
12.6 Conexão triângulo-estrela equilibrada ... 458
12.7 Potência em um sistema equilibrado ... 461
12.8 †Sistemas trifásicos desequilibrados ... 466
12.9 *PSpice* para circuitos trifásicos ... 470
12.10 Aplicações ... 474
12.10.1 Medição de potência trifásica ... 475
12.10.2 Instalação elétrica residencial ... 480
12.11 Resumo ... 482
Questões para revisão ... 483
Problemas ... 484
Problemas abrangentes ... 491

Capítulo 13 Circuitos de acoplamento magnético ... 493

13.1 Introdução ... 494
13.2 Indutância mútua ... 494
13.3 Energia em um circuito acoplado ... 502
13.4 Transformadores lineares ... 505
13.5 Transformadores ideais ... 511
13.6 Autotransformadores ideais ... 517
13.7 †Transformadores trifásicos ... 520
13.8 Análise de circuitos magneticamente acoplados usando o *PSpice* ... 522
13.9 †Aplicações ... 527
13.9.1 O transformador como dispositivo de isolamento ... 527
13.9.2 O transformador como dispositivo de casamento de impedâncias ... 529
13.9.3 Distribuição de energia elétrica ... 530
13.10 Resumo ... 532
Questões para revisão ... 533
Problemas ... 534
Problemas abrangentes ... 544

Capítulo 14 Resposta de frequência ... 545

14.1 Introdução ... 546
14.2 Função de transferência ... 546
14.3 †Escala de decibéis ... 549
14.4 Gráficos de Bode ... 551
14.5 Ressonância em série ... 561
14.6 Ressonância em paralelo ... 565
14.7 Filtros passivos ... 568
14.7.1 Filtro passa-baixas ... 569
14.7.2 Filtro passa-altas ... 570
14.7.3 Filtro passa-faixa ... 570
14.7.4 Filtro rejeita-faixa ... 571
14.8 Filtros ativos ... 573
14.8.1 Filtro passa-baixas de primeira ordem ... 574
14.8.2 Filtro passa-altas de primeira ordem ... 574
14.8.3 Filtro passa-faixa ... 574
14.8.4 Filtro rejeita-faixa (ou notch) ... 576
14.9 Fatores de escala ... 579
14.9.1 Aplicação de fatores de escala a amplitudes ... 579
14.9.2 Aplicação de fatores de escala a frequências ... 580
14.9.3 Aplicação de fatores de escala a amplitudes e frequências ... 581
14.10 Resposta de frequência usando o *PSpice* ... 582
14.11 Cálculos usando o *MATLAB* ... 586
14.12 †Aplicações ... 588
14.12.1 Receptor de rádio ... 588
14.12.2 Discagem por tom ... 590
14.12.3 Circuito de cruzamento ... 591
14.13 Resumo ... 593
Questões para revisão ... 594
Problemas ... 595
Problemas abrangentes ... 602

Parte 3 Análise Avançada de Circuitos 604

Capítulo 15 Introdução à transformada de Laplace ... 605

15.1 Introdução ... 606
15.2 Definição de transformadas de Laplace ... 607
15.3 Propriedades das transformadas de Laplace ... 609
15.4 Transformada de Laplace inversa ... 620
15.4.1 Polos simples ... 620
15.4.2 Polos repetidos ... 621
15.4.3 Polos complexos ... 622
15.5 Integral de convolução ... 626
15.6 †Aplicação a equações integro-diferenciais ... 634
15.7 Resumo ... 636
Questões para revisão ... 637
Problemas ... 637

Capítulo 16 Aplicações da transformada de laplace 642
16.1 Introdução 643
16.2 Modelos de elementos de circuitos 643
16.3 Análise de circuitos 649
16.4 Funções de transferência 652
16.5 Variáveis de estado 657
16.6 †Aplicações 663
16.6.1 Estabilidade de circuitos 663
16.6.2 Síntese de circuitos 666
16.7 Resumo 671
Questões para revisão 672
Problemas 673
Problemas abrangentes 682

Capítulo 17 Séries de Fourier 683
17.1 Introdução 684
17.2 Séries de Fourier trigonométricas 684
17.3 Considerações sobre simetria 692
17.3.1 Simetria par 692
17.3.2 Simetria ímpar 694
17.3.3 Simetria de meia onda 695
17.4 Aplicações em circuitos 701
17.5 Potência média e valores RMS 704
17.6 Séries de Fourier exponenciais 708
17.7 Análise de Fourier usando o *PSpice* 713
17.7.1 Transformada de Fourier discreta 714
17.7.2 Transformada de Fourier rápida 714
17.8 †Aplicações 718
17.8.1 Analisadores de espectro 718
17.8.2 Filtros 719
17.9 Resumo 721
Questões para revisão 723
Problemas 723
Problemas abrangentes 731

Capítulo 18 Transformada de Fourier 732
18.1 Introdução 733
18.2 Definição de transformada de Fourier 733
18.3 Propriedades das transformadas de Fourier 738
18.4 Aplicações em circuitos 751
18.5 Teorema de Parseval 753
18.6 Comparação entre transformadas de Fourier e de Laplace 756
18.7 †Aplicações 757
18.7.1 Modulação de amplitude 757
18.7.2 Amostragem 759
18.8 Resumo 760
Questões para revisão 761
Problemas 762
Problemas abrangentes 768

Capítulo 19 Circuitos de duas portas 769
19.1 Introdução 770
19.2 Parâmetros de impedância 770
19.3 Parâmetros de admitância 774
19.4 Parâmetros híbridos 778
19.5 Parâmetros de transmissão 783
19.6 †Relações entre parâmetros 787
19.7 Interconexão de circuitos elétricos 790
19.8 Cálculo de parâmetros de circuitos de duas portas usando o *PSpice* 795
19.9 †Aplicações 798
19.9.1 Circuitos transistorizados 798
19.9.2 Síntese de circuitos em cascata 803
19.10 Resumo 806
Questões para revisão 807
Problemas 808
Problemas abrangentes 818

Apêndice A Equações simultâneas e inversão de matrizes 819

Apêndice B Números complexos 828

Apêndice C Fórmulas matemáticas 836

Apêndice D Respostas para os problemas ímpares 841

Referências 865

Índice 867

FUNDAMENTOS DE

CIRCUITOS ELÉTRICOS

5ª Edição

PARTE UM

CIRCUITOS CC

TÓPICOS

1 Conceitos básicos

2 Leis básicas

3 Métodos de análise

4 Teoremas de circuitos

5 Amplificadores operacionais

6 Capacitores e indutores

7 Circuitos de primeira ordem

8 Circuitos de segunda ordem

1

CONCEITOS BÁSICOS

Alguns livros devem ser degustados, outros devem ser engolidos e alguns poucos devem ser mastigados e digeridos.

Francis Bacon

Progresso profissional

Critérios ABET EC 2000 (3.a), "habilidade em aplicar conhecimentos de matemática, ciências e engenharia".

Quando se é estudante, é fundamental estudar matemática, ciências e engenharia com o propósito de torná-lo capaz de aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas de engenharia. A capacidade, nesse caso, é a habilidade de pôr em prática os fundamentos dessas áreas na solução de um problema. Portanto, como podemos desenvolver e aperfeiçoar essa habilidade?

A melhor abordagem é resolver o maior número possível de problemas em todos os seus cursos. Entretanto, se você realmente quiser ter êxito nesse ponto, deverá dedicar um tempo para analisar onde, quando e por que você tem dificuldade em chegar de maneira fácil a soluções bem-sucedidas. Talvez você se surpreenda ao constatar que a maior dificuldade na resolução de problemas está relacionada com a matemática e não com a interpretação da teoria. Talvez você também constate que geralmente começa a resolver o problema de forma precoce. Investir um tempo para pensar em como resolvê-lo sempre irá, no final das contas, lhe poupar tempo e frustração.

No meu caso, o que funciona melhor é a aplicação de nossa técnica de seis etapas para resolução de problemas. Em seguida, identifico cuidadosamente as áreas nas quais tenho dificuldade e, muitas vezes, minhas reais deficiências estão no entendimento e na habilidade em usar corretamente certos princípios matemáticos. De imediato, lanço mão de meus livros de matemática fundamental e reviso atenciosamente as seções apropriadas e, em alguns casos, resolvo alguns problemas do exemplo do livro consultado. Isso me leva a outro ponto importante que você sempre deve seguir: ter à mão todos os seus livros-texto de fundamentos de matemática, ciências e engenharia.

Esse processo de sempre pesquisar um material que você acha que já assimilou em cursos anteriores pode parecer, a princípio, muito entediante; entretanto, à medida que suas habilidades se desenvolvem e seu conhecimento cresce, isso se tornará cada vez mais fácil. Pessoalmente falando, foi exatamente esse processo que me transformou de um estudante abaixo da média a alguém que pôde receber um título de Ph.D. e se tornar um pesquisador bem-sucedido.

1.1 Introdução

As teorias de circuitos elétricos e de eletromagnetismo são as duas teorias fundamentais sobre as quais todos os campos da engenharia elétrica se baseiam. Muitos ramos da engenharia elétrica, como geração de energia, máquinas elétricas, controle, eletrônica, comunicações e instrumentação, têm como princípio teoria dos circuitos elétricos. Portanto, o curso básico de teoria de circuitos elétricos é o curso mais importante para um estudante de engenharia elétrica e sempre é um excelente ponto de partida para quem está iniciando nessa área. A teoria de circuitos também é valiosa para os alunos que estão se especializando em outras áreas de ciências físicas, pois os circuitos são um excelente modelo para o estudo de sistemas de energia em geral e também por ter matemática aplicada, física e topologia envolvidas.

Na engenharia elétrica, estamos muitas vezes interessados na comunicação ou na transmissão de energia de um ponto a outro, e para isso é necessária uma interconexão de dispositivos elétricos. Tal interconexão é conhecida como *circuito elétrico* e cada componente do circuito é denominado *elemento*.

Circuito elétrico é uma interconexão de elementos elétricos.

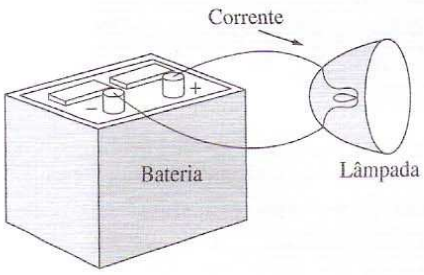


Figura 1.1 Circuito elétrico simples.

Um circuito elétrico simples, como mostrado na Figura 1.1, é formado por três elementos básicos: uma bateria, uma lâmpada e fios para interconexão. Ele pode existir por si só, pois tem várias aplicações, como uma lanterna, um holofote e assim por diante.

Um circuito real mais complexo é mostrado na Figura 1.2, representado pelo diagrama esquemático de um transmissor de rádio. Embora pareça complicado, esse circuito pode ser analisado empregando as técnicas estudadas neste livro. Nosso objetivo é que você aprenda várias técnicas analíticas e aplicações de *software* para descrever o comportamento de um circuito como esse.

Os circuitos elétricos são usados em inúmeros sistemas elétricos para realizar diferentes tarefas. O propósito deste livro não é o estudo dos vários empregos e aplicações de circuitos, mas, sim, a análise de circuitos. Nesse sentido, estudaremos o comportamento de um circuito: como ele responde a uma determinada entrada? Como os elementos e dispositivos interconectados interagem no circuito?

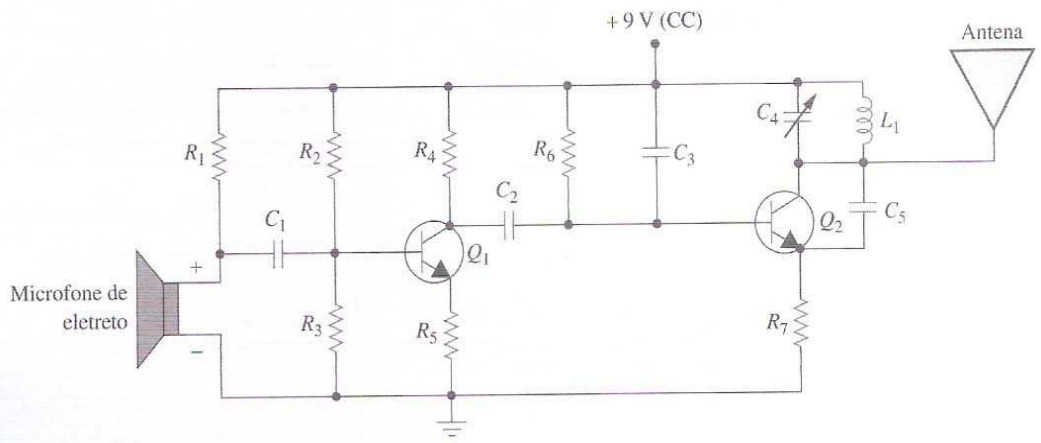


Figura 1.2 Circuito elétrico de um transmissor de rádio.

Começaremos nosso estudo definindo alguns conceitos básicos. Entre esses conceitos temos carga, corrente, tensão, elementos de circuito, potência e energia. Antes da definição de cada um deles, temos de estabelecer um sistema de unidades que usaremos ao longo do livro.

1.2 Sistemas de unidades

Como técnicos e engenheiros eletricistas, lidamos com quantidades mensuráveis. Entretanto, nossa medição deve ser dita em uma linguagem-padrão que praticamente todos os profissionais serão capazes de entender, independentemente do país onde a medida estiver sendo feita. O Sistema Internacional de Unidades (SI), adotado pela Conferência Geral de Pesos e Medidas em 1960, é conhecido como uma linguagem de medição internacional. Nesse sistema, existem seis unidades principais a partir das quais todas as demais grandezas físicas podem ser derivadas. A Tabela 1.1 mostra essas seis unidades, seus símbolos e as grandezas físicas que elas representam. As unidades SI são usadas ao longo de todo o livro.

Uma grande vantagem das unidades SI é o uso de prefixos baseados na potência de 10 para a obtenção de unidades maiores e menores em relação às unidades básicas. A Tabela 1.2 mostra os prefixos SI e seus símbolos. Por exemplo, a seguir temos expressões da mesma distância em metros (m):

600.000.000 mm 600.000 m 600 km

1.3 Carga e corrente

O conceito de carga elétrica é o princípio fundamental para explicar todos os fenômenos elétricos. Da mesma forma, a quantidade mais elementar em um circuito elétrico é a *carga elétrica*. Todos nós experimentamos o efeito da carga elétrica quando tentamos tirar nosso suéter de lã e este fica preso ao nosso corpo ou vamos caminhar sobre um carpete e tomamos um choque.

Carga é uma propriedade elétrica das partículas atômicas que compõem a matéria, medida em coulombs (C).

Tabela 1.1 • As seis unidades SI básicas e uma unidade relevante usada neste livro.

Quantidade	Unidade básica	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Carga	coulomb	C

Tabela 1.2 • Prefixos SI.

Multiplicador	Prefixo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

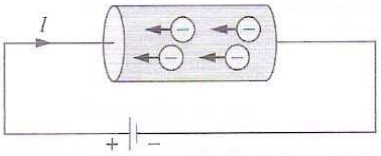
Sabemos, da física elementar, que toda matéria é formada por elementos fundamentais conhecidos como átomos, que são constituídos por elétrons, prótons e nêutrons. Também sabemos que a carga e em um elétron é negativa e igual em magnitude a $1{,}602 \times 10^{-19}$ C, enquanto um próton transporta uma carga positiva de mesma magnitude do elétron. A presença de números iguais de prótons e elétrons deixa um átomo com carga neutra.

Os seguintes pontos devem ser observados sobre a carga elétrica:

1. Coulomb é uma unidade grande para cargas. Em 1 C de carga, existem $1/(1{,}602 \times 10^{-19}) = 6{,}24 \times 10^{18}$ elétrons. Portanto, valores reais ou de laboratório para cargas se encontram na casa dos pC, nC ou μC.[1]
2. De acordo com observações experimentais, as únicas cargas que ocorrem na natureza são múltiplos inteiros da carga eletrônica $e = -1{,}602 \times 10^{-19}$ C.
3. A *lei da conservação das cargas* afirma que as cargas não podem ser criadas nem destruídas, apenas transferidas. Portanto, a soma algébrica das cargas elétricas de um sistema não se altera.

Agora, consideremos o fluxo de cargas elétricas. Uma característica exclusiva da carga elétrica é o fato de ela ser móvel; isto é, ela pode ser transferida de um lugar a outro, onde pode ser convertida em outra forma de energia.

Quando um fio condutor (formado por vários átomos) é conectado a uma bateria (uma fonte de força eletromotriz), as cargas são compelidas a se mover; as cargas positivas se movem em uma direção, enquanto as cargas negativas se movem na direção oposta. A essa movimentação de cargas dá o nome de corrente elétrica. Por convenção, o fluxo da corrente é aquele das cargas positivas, isto é, ao contrário do fluxo das cargas negativas, conforme mostra a Figura 1.3. Essa convenção foi introduzida por Benjamin Franklin (1706-1790), cientista e inventor norte-americano. Embora saibamos que a corrente em condutores metálicos se deve a elétrons carregados negativamente, seguiremos a convenção adotada universalmente de que a corrente é o fluxo líquido das cargas positivas. Portanto,



Bateria

Figura 1.3 Corrente elétrica devido ao fluxo de cargas eletrônicas em um condutor.

Corrente elétrica é o fluxo de carga por unidade de tempo, medido em ampères (A).

Matematicamente, a relação entre a corrente i, a carga q e o tempo t é

$$i \triangleq \frac{dq}{dt} \tag{1.1}$$

onde a corrente é medida em ampères (A) e

1 ampère = 1 coulomb/segundo

A carga transferida entre o instante t_0 e o instante t é obtida integrando ambos os lados da Equação (1.1). Obtemos

Convenção é uma maneira padronizada de se descrever algo de modo que outros profissionais da área possam entender seu significado. Usaremos convenções do Institute of Electrical Electronics Engineers (IEEE) ao longo deste livro.

[1] Entretanto, um capacitor grande de uma fonte de alimentação é capaz de armazenar até 0,5 C de carga.

PERFIS HISTÓRICOS

Da Burndy Library Collection na Huntington Library, San Marino, Califórnia.

André-Marie Ampère (1775-1836), matemático e físico francês, criou as bases da eletrodinâmica. Definiu corrente elétrica e, em meados de 1820, desenvolveu uma maneira de medi-la.

Nascido em Lyons, na França, aos 12 anos, Ampère aprendeu o latim em poucas semanas, já que havia um profundo interesse por matemática e muitos dos seus melhores trabalhos eram escritos nesse idioma. Foi um brilhante cientista e um escritor prolífico. Formulou as leis do eletromagnetismo. Inventou o eletroímã e o amperímetro. A unidade de corrente elétrica, o ampère, recebeu esse nome em sua homenagem.

$$Q \triangleq \int_{t_0}^{t} i\,dt \qquad (1.2)$$

A maneira pela qual definimos a corrente i na Equação (1.1) sugere que a corrente não precisa ser uma função de valor constante. Como muitos dos exemplos e problemas neste e nos capítulos posteriores sugerem, podem haver diversos tipos de corrente; isto é, a carga pode variar com o tempo de diversas maneiras.

Se a corrente não muda com o tempo e permanece constante, podemos chamá-la de *corrente contínua* (CC).

Corrente contínua (CC) é uma corrente que permanece constante ao longo do tempo.

Por convenção, o símbolo I é usado para representar uma corrente contínua desse tipo.

Uma corrente que varia com o tempo é conhecida pelo símbolo i. E uma forma comum de corrente é a corrente senoidal ou *corrente alternada* (CA).

Corrente alternada (CA) é uma corrente que varia com o tempo segundo uma forma de onda senoidal.

Uma corrente desse tipo é aquela que usamos em nossas residências para ligarmos aparelhos de ar-condicionado, refrigeradores, máquinas de lavar roupa e outros eletrodomésticos. A Figura 1.4 ilustra as correntes contínua e alternada; esses são os dois tipos mais comuns de corrente. Veremos outros tipos de corrente mais à frente.

Ao definirmos corrente como a movimentação de cargas, é esperado que ela tenha um sentido de fluxo associado. Como mencionado anteriormente, esse sentido é, por convenção, tomado como o sentido da movimentação das cargas positivas. Sendo assim, uma corrente de 5 A poderia ser representada positiva ou negativamente, como pode ser observado na Figura 1.5. Em outras palavras, uma corrente negativa de –5 A fluindo em um determinado sentido, conforme mostrado na Figura 1.5*b*, é a mesma que uma corrente de +5 A fluindo no sentido oposto.

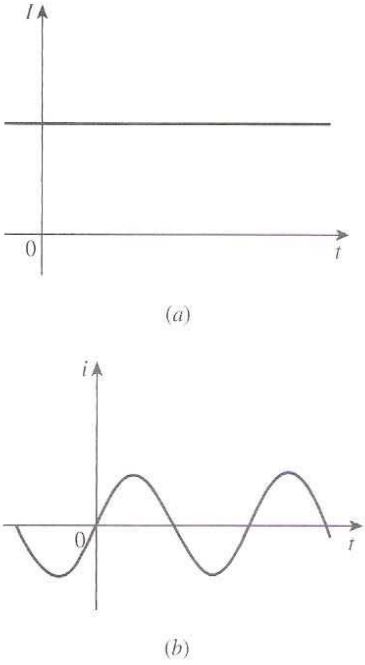


Figura 1.4 Dois tipos comuns de corrente: (*a*) corrente contínua (CC); (*b*) corrente alternada (CA).

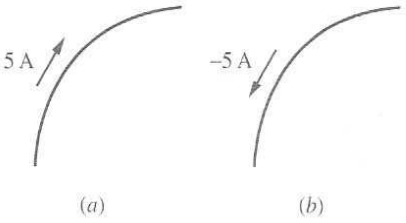


Figura 1.5 Fluxo convencional de corrente: (*a*) fluxo positivo de corrente; (*b*) fluxo negativo de corrente.

EXEMPLO 1.1

Qual é a quantidade de carga representada por 4.600 elétrons?

Solução: Cada elétron tem uma carga igual a $-1{,}602 \times 10^{-19}$ C. Portanto, 4.600 elétrons terão $-1{,}602 \times 10^{-19}$ C/elétron $\times$ 4.600 elétrons $= -7{,}369 \times 10^{-16}$ C.

PROBLEMA PRÁTICO 1.1

Calcule a quantidade de carga representada por seis milhões de prótons.

Resposta: $+9{,}612 \times 10^{-13}$ C.

EXEMPLO 1.2

A carga total entrando em um terminal é dada por $q = 5t\ sen\ 4\pi t$ mC. Calcule a corrente no instante $t = 0{,}5$ s.

Solução: $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5t \text{ sen } 4\pi t)$ mC/s $= (5 \text{ sen } 4\pi t + 20\pi t \cos 4\pi t)$ mA

Para $t = 0{,}5$,

$$i = 5 \text{ sen } 2\pi + 10\pi \cos 2\pi = 0 + 10\pi = 31{,}42 \text{ mA}$$

PROBLEMA PRÁTICO 1.2

Se no Exemplo 1.2, $q = (10 - 10e^{-2t})$ mC, determine a corrente em $t = 1{,}0$ s.

Resposta: 2,707 mA.

EXEMPLO 1.3

Determine a carga total que entra em um terminal entre os instantes $t = 1$ s e $t = 2$ s se a corrente que passa pelo terminal é $i = (3t^2 - t)$ A.

Solução: $Q = \displaystyle\int_{t=1}^{2} i\,dt = \int_{1}^{2} (3t^2 - t)\,dt$

$$= \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = (8 - 2) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 5{,}5 \text{ C}$$

PROBLEMA PRÁTICO 1.3

A corrente que flui através de um elemento é

$$i = \begin{cases} 4 \text{ A}, & 0 < t < 1 \\ 4t^2 \text{ A}, & t > 1 \end{cases}$$

Calcule a carga que entra no elemento de $t = 0$ a $t = 2$ s.

Resposta: 13,333 C.

1.4 Tensão

Conforme explicado anteriormente, para deslocar o elétron em um condutor a determinado sentido é necessário algum trabalho ou transferência de energia. Esse trabalho é realizado por uma força eletromotriz (FEM) externa representada pela bateria na Figura 1.3. Essa FEM também é conhecida como *tensão* ou *diferença de potencial*. A tensão v_{ab} entre dois pontos a e b em um circuito elétrico é a energia (ou trabalho) necessária para deslocar uma carga unitária de a para b; matematicamente,

$$v_{ab} \triangleq \frac{dw}{dq} \tag{1.3}$$

onde w é a energia em joules (J) e q é a carga em coulombs (C). A tensão v_{ab}, ou simplesmente v, é medida em volts (V), nome dado em homenagem ao físico italiano Alessandro Antonio Volta (1745-1827), que inventou a primeira pilha voltaica. A partir da Equação (1.3) fica evidente que

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb} = 1 \text{ newton-metro/coulomb}$$

PERFIS HISTÓRICOS

Da Burndy Library Collection na Huntington Library, San Marino, Califórnia.

Alessandro Antonio Volta (1745-1827), físico italiano, inventou a bateria elétrica, a qual forneceu o primeiro fluxo contínuo de eletricidade, e o capacitor.

Nascido de uma nobre família em Como, Itália, Volta realizou experimentos elétricos aos 18 anos. A sua invenção da bateria, em 1796, revolucionou o uso da eletricidade. A publicação de seu trabalho, em 1800, marcou o começo da teoria de circuitos elétricos. Volta recebeu várias homenagens durante a sua vida. A unidade de tensão, ou diferença de potencial, conhecido como *volt*, recebeu essa denominação em sua homenagem.

Portanto,

Tensão (ou diferença de potencial) é a energia necessária para deslocar uma carga unitária através de um elemento, medida em volts (V).

A Figura 1.6 mostra a tensão através de um elemento (representado por um bloco retangular) conectado aos pontos a e b. Os sinais positivo (+) e negativo (–) são usados para definir o sentido referencial ou a polaridade da tensão. E v_{ab} pode ser interpretada de duas maneiras: (1) o ponto a se encontra a um potencial de v_{ab} volts mais alto que o ponto b ou (2) o potencial no ponto a em relação ao ponto b é v_{ab}. Segue, logicamente, que em geral

$$v_{ab} = -v_{ba} \tag{1.4}$$

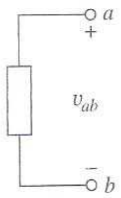


Figura 1.6 Polaridade da tensão v_{ab}.

Por exemplo, na Figura 1.7 temos duas representações da mesma tensão. Na Figura 1.7*a*, o ponto a se encontra +9 V acima do ponto b; na Figura 1.7*b* o ponto b se encontra –9 V acima do ponto a. Podemos dizer que, na Figura 1.7*a*, existe uma *queda de tensão* de 9 V de a para b ou, de forma equivalente, uma *elevação de tensão* de b para a. Em outras palavras, uma queda de tensão de a para b é equivalente a uma elevação de tensão de b para a.

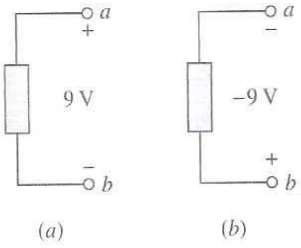


Figura 1.7 Duas representações equivalentes da mesma tensão v_{ab}: (*a*) o ponto a se encontra 9 V acima do ponto b; (*b*) o ponto b se encontra –9 V acima do ponto a.

Corrente e tensão são as duas variáveis básicas em circuitos elétricos. O termo comum *sinal* é usado para uma quantidade elétrica como uma corrente ou tensão (ou até mesmo onda eletromagnética) quando ela estiver transportando informações. Os engenheiros preferem chamá-la de sinais variáveis em vez de funções matemáticas do tempo em razão de sua importância em comunicações e outras disciplinas. Assim como a corrente elétrica, uma tensão constante é denominada *tensão CC* e é representada por V, enquanto uma tensão que varia com o tempo com uma forma senoidal é chamada *tensão CA* e é representada por v. Uma tensão CC é comumente produzida por uma bateria; uma tensão CA é produzida por um gerador elétrico.

1.5 Potência e energia

Embora corrente e tensão sejam as duas variáveis básicas em um circuito elétrico, elas sozinhas não são suficientes. Na prática, precisamos saber quanta *potência* um dispositivo elétrico é capaz de manipular. Considere, por exemplo,

Tenha em mente que corrente elétrica passa sempre *através* de um elemento, já a tensão elétrica é sempre *sobre* os terminais do elemento ou entre dois pontos.

uma lâmpada de 100 W que fornece mais luz que uma de 60 W, ou mesmo quando pagamos nossas contas de luz às fornecedoras em que estamos pagando pela *energia* elétrica consumida ao longo de certo período. Portanto, os cálculos de potência e energia são importantes na análise de circuitos.

Para relacionar potência e energia à tensão e corrente, lembramos da física que:

Potência é a velocidade com que se consome ou se absorve energia medida em watts (W).

Escrevemos essa relação como

$$p \triangleq \frac{dw}{dt} \tag{1.5}$$

onde p é a potência em watts (W), w é a energia em joules (J) e t é o tempo em segundos (s). Das Equações (1.1), (1.3) e (1.5), segue que

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = vi \tag{1.6}$$

ou

$$p = vi \tag{1.7}$$

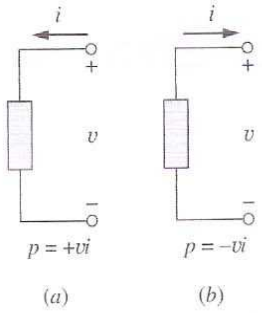


Figura 1.8 Polaridades referenciais para potência usando a convenção do sinal passivo: (*a*) absorção de potência; (*b*) fornecimento de potência.

A potência p na Equação (1.7) é uma quantidade variável com o tempo e é denominada *potência instantânea*. Portanto, a potência absorvida ou fornecida por um elemento é o produto da tensão no elemento pela corrente através dele. Se a potência tem um sinal +, ela está sendo fornecida para o elemento ou absorvida por ele. Em contrapartida, se a potência tiver um sinal –, a potência está sendo fornecida pelo elemento. Mas como saber quando a potência tem um sinal positivo ou negativo?

O sentido da corrente e a polaridade da tensão desempenham um papel fundamental na determinação do sinal da potência. É importante, portanto, prestar atenção na relação entre corrente i e tensão v na Figura 1.8*a*. A polaridade da tensão e o sentido da corrente devem estar de acordo com aquelas mostradas na Figura 1.8*a* de modo que a potência tenha um sinal positivo. Isso é conhecido como *convenção de sinal passivo*. Pela convenção de sinal passivo, a corrente entra pela polaridade positiva da tensão. Nesse caso, $p = +vi$ ou $vi > 0$ implica que o elemento está absorvendo potência. Entretanto, se $p = -vi$ ou $vi < 0$, como na Figura 1.8*b*, o elemento está liberando ou fornecendo potência.

Quando os sentidos da tensão e da corrente estiverem de acordo com a Figura 1.8*b*, temos a *convenção do sinal ativo* e $p = +vi$.

A convenção de sinal passivo é realizada quando a corrente entra pelo terminal positivo de um elemento e $p = +vi$. Se a corrente entra pelo terminal negativo, $p = -vi$.

A menos que dito o contrário, seguiremos a convenção de sinal passivo ao longo do livro. Por exemplo, o elemento em ambos os circuitos da Figura 1.9 tem absorção de potência de +12 W, pois uma corrente positiva entra pelo terminal positivo em ambos os casos. Entretanto, na Figura 1.10 o elemento está fornecendo potência de +12 W, pois uma corrente positiva entra pelo terminal

negativo. Obviamente, uma absorção de potência de –12 W equivale a um fornecimento de potência de +12 W. Em geral,

$$+\text{Potência absorvida} = -\text{Potência fornecida}$$

Na realidade, a *lei da conservação da energia* tem de ser obedecida em qualquer circuito elétrico. Por essa razão, a soma algébrica da potência em um circuito, a qualquer instante de tempo, deve ser zero:

$$\boxed{\sum p = 0} \tag{1.8}$$

Isso confirma novamente o fato de que a potência total fornecida ao circuito deve ser igual à potência total absorvida.

A partir da Equação (1.6), a energia absorvida ou fornecida por um elemento do instante t_0 ao instante t é

$$w = \int_{t_0}^{t} p\,dt = \int_{t_0}^{t} vi\,dt \tag{1.9}$$

Energia é a capacidade de realizar trabalho e é medida em joules (J).

As concessionárias de energia elétrica medem a energia em watts-hora (Wh), em que

$$1\ \text{Wh} = 3.600\ \text{J}$$

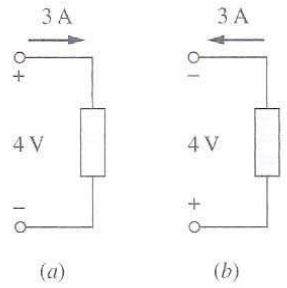


Figura 1.9 Dois casos de um elemento com absorção de potência de 12 W: (*a*) $p = 4 \times 3 = 12$ W; (*b*) $p = 4 \times 3 = 12$ W.

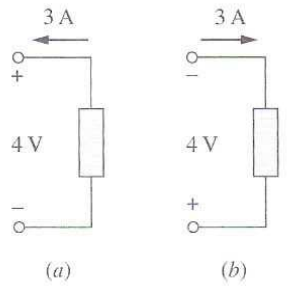


Figura 1.10 Dois casos de um elemento com fornecimento de potência de 12 W: (*a*) $p = -4 \times 3 = -12$ W; (*b*) $p = -4 \times 3 = -12$ W.

EXEMPLO 1.4

Uma fonte de energia com uma corrente constante de 2 A força a passagem dessa corrente através de uma lâmpada por 10 s. Se forem liberados 2,3 kJ na forma de energia luminosa e calorífica, calcule a queda de tensão na lâmpada.

Solução: A carga total é

$$\Delta q = i\,\Delta t = 2 \times 10 = 20\ \text{C}$$

A queda de tensão é

$$v = \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{2{,}3 \times 10^3}{20} = 115\ \text{V}$$

PROBLEMA PRÁTICO 1.4

Mover uma carga q do ponto a ao ponto b requer –30 J. Determine a queda de tensão v_{ab} se: (a) $q = 6$ C, (b) $q = -3$ C.

Resposta: (a) –5 V, (b) 10 V.

EXEMPLO 1.5

Determine a potência fornecida para um elemento no instante $t = 3$ ms se a corrente que entra pelo terminal positivo for

$$i = 5 \cos 60\,\pi t\ \text{A}$$

e a tensão for: (a) $v = 3i$, (b) $v = 3di/dt$.

Solução: (a) A tensão é $v = 3i = 15 \cos 60\,\pi t$; portanto, a potência é

$$p = vi = 75 \cos^2 60\pi t\ \text{W}$$

No instante $t = 3$ ms,

$$p = 75\cos^2(60\pi \times 3 \times 10^{-3}) = 75\cos^2 0{,}18\pi = 53{,}48 \text{ W}$$

(b) Determinamos a tensão e a potência como

$$v = 3\frac{di}{dt} = 3(-60\pi)5 \text{ sen } 60\pi t = -900\pi \text{ sen } 60\pi t \text{ V}$$

$$p = vi = -4.500\pi \text{ sen } 60\pi t \cos 60\pi t \text{ W}$$

No instante $t = 3$ ms,

$$p = -4.500\pi \text{ sen } 0{,}18\pi \cos 0{,}18\pi \text{ W}$$
$$= -14.137{,}167 \text{ sen } 32{,}4^\circ \cos 32{,}4^\circ = -6{,}396 \text{ kW}$$

PROBLEMA PRÁTICO 1.5

Determine a potência fornecida para o elemento no Exemplo 1.5 no instante $t = 5$ ms se a corrente permanecer constante e a tensão for:

(a) $v = 2i$ V

(b) $v = \left(10 + 5\int_0^t i\,dt\right)$ V.

Resposta: (a) 17,27 W, (b) 29,7 W.

EXEMPLO 1.6

Quanta energia uma lâmpada de 100 W consome em duas horas?

Solução: $w = pt = 100 \text{ (W)} \times 2 \text{ (h)} \times 60 \text{ (min/h)} \times 60 \text{ (s/min)}$
$= 720.000 \text{ J} = 720 \text{ kJ}$

Isso é o mesmo que

$$w = pt = 100 \text{ W} \times 2 \text{ h} = 200 \text{ Wh}$$

PROBLEMA PRÁTICO 1.6

Um forno elétrico consome 15 A quando conectado a uma linha de 120 V. Quanto tempo leva para consumir 180 kJ?

Resposta: 50 s.

1.6 Elementos de circuito

Conforme discutido na Seção 1.1, um elemento é o componente básico de um circuito. Um circuito elétrico é simplesmente uma interconexão de elementos, e a análise de circuitos é o processo de determinar tensões nos elementos do circuito (ou as correntes através deles).

Existem dois tipos de elementos encontrados nos circuitos elétricos: elementos *passivos* e elementos *ativos*. Um elemento ativo é capaz de gerar energia enquanto um elemento passivo não é. Exemplos de elementos passivos são resistores, capacitores e indutores; os elementos ativos típicos são geradores, baterias e amplificadores operacionais. Nosso objetivo nesta seção é ganhar familiaridade com alguns elementos ativos importantes.

Os elementos ativos mais importantes são fontes de tensão ou corrente que geralmente liberam potência para o circuito conectado a eles. Há dois tipos de fontes: as dependentes e as independentes.

Uma **fonte independente ideal** é um elemento ativo que fornece uma tensão especificada ou corrente que é completamente independente de outros elementos do circuito.

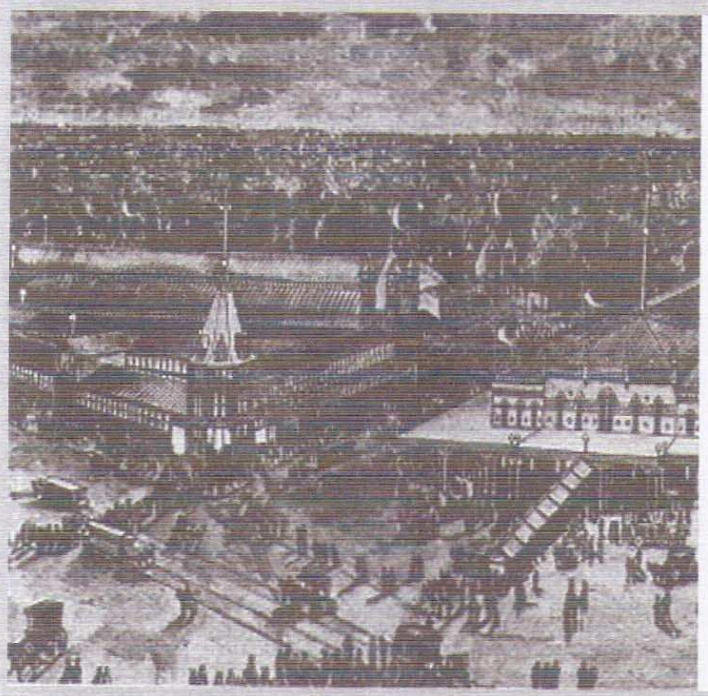
PERFIS HISTÓRICOS

Exposição de 1884 Nos Estados Unidos, nada promoveu melhor o futuro da eletricidade como a Exposição Internacional de Eletricidade de 1884.

Imagine um mundo iluminado apenas por velas e lampiões de gás onde os meios de transporte mais comuns eram andar a pé, a cavalo ou em uma carruagem. Foi nesse mundo que foi criada uma exposição que destacava Thomas Edison e refletia sua alta capacidade de promover invenções e produtos. Suas exposições eram caracterizadas por espetaculares *displays* luminosos alimentados por um impressionante gerador "Jumbo" de 100 kW.

Os dínamos e lâmpadas de Edward Weston foram apresentados no *display* da Companhia de Iluminação Elétrica dos Estados Unidos. O famoso conjunto de instrumentos científicos de Weston também foi exibido.

Entre outros expositores proeminentes, podemos citar Frank Sprague, Elihu Thompson e a Brush Electric Company of Cleveland. A American Institute of Electrical Engineers (AIEE) sediou sua primeira reunião técnica em 7 e 8 de outubro no Franklin Institute durante a exposição. A AIEE se juntou ao Institute of Radio Engineers (IRE) em 1964 para formarem o Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).



Smithsonian Institution.

Em outras palavras, uma fonte de tensão independente ideal libera para o circuito a corrente que for necessária para manter a tensão em seus terminais. Fontes físicas como baterias e geradores podem ser consideradas como aproximações para fontes de tensão ideal. A Figura 1.11 mostra os símbolos para fontes de tensão independente. Note que ambos os símbolos nas Figuras 1.11*a* e *b* podem ser usados para representar uma fonte de tensão CC, porém, apenas o símbolo na Figura 1.11*a* pode ser utilizado para uma fonte de tensão variável com o tempo. De forma similar, uma fonte de corrente independente

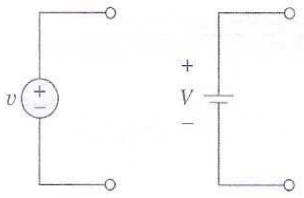


Figura 1.11 Símbolos para fontes de tensão independente: (*a*) usada para tensão constante ou variável com o tempo; (*b*) utilizada para tensão constante (CC).

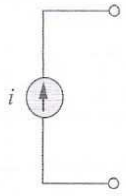


Figura 1.12 Símbolo para fonte de corrente independente.

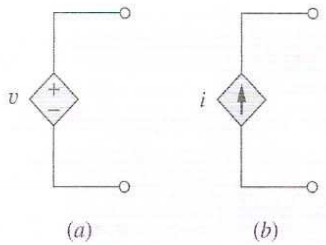


Figura 1.13 Símbolos para (*a*) fonte de tensão dependente; (*b*) fonte de corrente dependente.

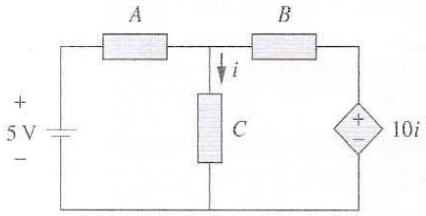


Figura 1.14 A fonte do lado direito é uma fonte de tensão controlada por corrente.

ideal é um elemento ativo que fornece uma corrente especificada completamente independente da tensão na fonte. Isto é, a fonte de corrente libera para o circuito a tensão que for necessária para manter a corrente designada. O símbolo para uma fonte de corrente independente é mostrado na Figura 1.12, na qual a seta indica o sentido da corrente *i*.

Uma **fonte dependente** (ou **controlada**) **ideal** é um elemento ativo no qual a quantidade de energia é controlada por outra tensão ou corrente.

Fontes dependentes são normalmente designadas por símbolos com forma de losango, conforme mostrado na Figura 1.13. Já que o controle da fonte dependente é obtido por uma tensão ou corrente de algum outro elemento do circuito e a fonte pode ser de tensão ou de corrente, veja a seguir que há quatro tipos possíveis de fontes dependentes:

1. Fonte de tensão controlada por tensão (FTCT*).
2. Fonte de corrente controlada por tensão (FCCT).
3. Fonte de corrente controlada por corrente (FCCC).
4. Fonte de tensão controlada por corrente (FTCC).

Fontes dependentes são úteis no modelamento de elementos como transistores, amplificadores operacionais e circuitos integrados. Um exemplo de fonte de tensão controlada por corrente é mostrado no lado direito da Figura 1.14, em que a tensão $10i$ da fonte de tensão depende da corrente i através do elemento C. Os estudantes poderão ficar surpresos por saber que o valor da fonte de tensão dependente é $10i$ V (e não $10i$ A), pois se trata de uma fonte de tensão. O conceito-chave para se ter em mente é que uma fonte de tensão vem com polaridades (+ −) em seu símbolo, enquanto uma fonte de corrente vem com uma seta, independentemente do que ela dependa.

Deve-se observar que uma fonte de tensão ideal (dependente ou independente) produzirá qualquer corrente necessária para garantir que a tensão entre seus terminais seja conforme expressa, enquanto uma fonte de corrente ideal produzirá a tensão necessária para garantir o fluxo de corrente expresso. Portanto, uma fonte ideal poderia, teoricamente, fornecer uma quantidade de energia infinita. Deve-se notar também que as fontes não apenas fornecem potência a um circuito, como também podem absorver potência de um circuito. Para uma fonte de tensão, conhecemos a tensão, mas não a corrente por ela fornecida ou absorvida. Do mesmo modo, conhecemos a corrente fornecida por uma fonte de corrente, mas não a tensão nela.

EXEMPLO 1.7

Calcule a potência fornecida ou absorvida em cada elemento na Figura 1.15.

Solução: Aplicamos a convenção de sinal para potência mostrada nas Figuras 1.8 e 1.9. Para p_1, a corrente de 5 A está saindo do terminal positivo da fonte (ou entrando pelo terminal negativo); portanto,

$$p_1 = 20(-5) = -100 \text{ W} \qquad \text{Potência fornecida}$$

* N. de T.: É comum o leitor encontrar a designação em inglês VCVS (voltage-controlled voltage source) em vez de FTCT; CCVS (current-coltrolled voltage source) em vez de FCCT; VCCS (voltage-controlled current source) em vez de FCCC; e CCCS (current-controlled current source) em vez de FTCC.

Para p_2 e p_3, a corrente flui para o terminal positivo do elemento em cada caso.

$$p_2 = 12(5) = 60 \text{ W} \quad \text{Potência absorvida}$$
$$p_3 = 8(6) = 48 \text{ W} \quad \text{Potência absorvida}$$

Para p_4, devemos notar que a tensão é 8 V (positiva na parte superior), a mesma que a tensão para p_3, já que tanto o elemento passivo quanto a fonte dependente estão conectados aos mesmos terminais. (Lembre-se de que a tensão é sempre medida ao longo de um elemento em um circuito.) Desde que a corrente sai pelo terminal positivo,

$$p_4 = 8(-0{,}2I) = 8(-0{,}2 \times 5) = -8 \text{ W} \quad \text{Potência fornecida}$$

Devemos observar que a fonte de tensão independente de 20 V e a fonte de corrente dependente $0{,}2I$ estão fornecendo potência para o restante do circuito, enquanto os dois elementos passivos estão absorvendo potência. Da mesma forma,

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -100 + 60 + 48 - 8 = 0$$

De acordo com a Equação (1.8), a potência total fornecida é igual à potência total absorvida.

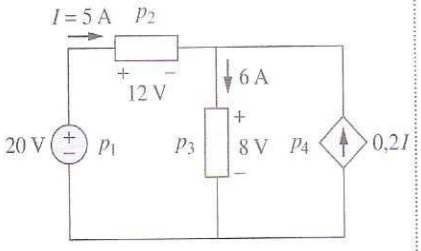


Figura 1.15 Esquema para o Exemplo 1.7.

PROBLEMA PRÁTICO 1.7

Calcule a potência absorvida ou fornecida por componente do circuito na Figura 1.16.

Resposta: $p_1 = -45$ W, $p_2 = 18$ W, $p_3 = 12$ W, $p_4 = 15$ W.

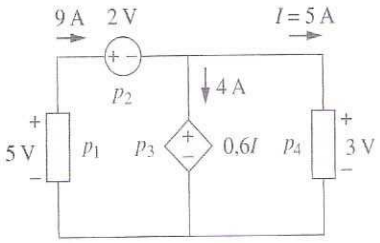


Figura 1.16 Esquema para o Problema prático 1.7.

1.7 †Aplicações[2]

Nesta seção, veremos duas aplicações práticas dos conceitos desenvolvidos neste capítulo. A primeira delas está relacionada com o tubo de imagens de uma TV e a outra com a maneira pela qual as concessionárias de energia elétrica determinam o valor das contas dos consumidores.

1.7.1 Tubo de imagens de TV

Uma importante aplicação do movimento de elétrons está tanto na transmissão como na recepção de sinais de TV. No lado da transmissão, uma câmera de TV reduz a cena de uma imagem óptica a um sinal elétrico. A varredura é efetuada com um fino fluxo de elétrons em um iconoscópio.

No lado da recepção, a imagem é reconstruída usando-se um tubo de raios catódicos (CRT – *cathode ray tube*) localizado no receptor da TV.[3] O CRT é representado na Figura 1.17. Diferentemente do iconoscópio que produz um feixe de elétrons de intensidade constante, o fluxo do CRT varia em intensidade de acordo com o sinal de entrada. O canhão de elétrons, mantido a um potencial elevado, dispara o fluxo de elétrons, que passa por dois conjuntos de placas para a deflexão horizontal e vertical de modo que o ponto na tela em que o fluxo incide pode se mover da direita para a esquerda e de cima para baixo. Quando o fluxo de elétrons atinge a tela fluorescente, ela libera luz naquele ponto. Portanto, o fluxo pode ser controlado de modo a "pintar" uma imagem na tela da TV.

Assim, nascia a câmera de televisão.

[2] Ao encontrar um símbolo de adaga precedendo o título de uma seção indica que se trata de uma seção que pode ser omitida, explicada brevemente ou ser dada como tarefa de casa.

[3] Os tubos de TV modernos usam uma tecnologia diferente.

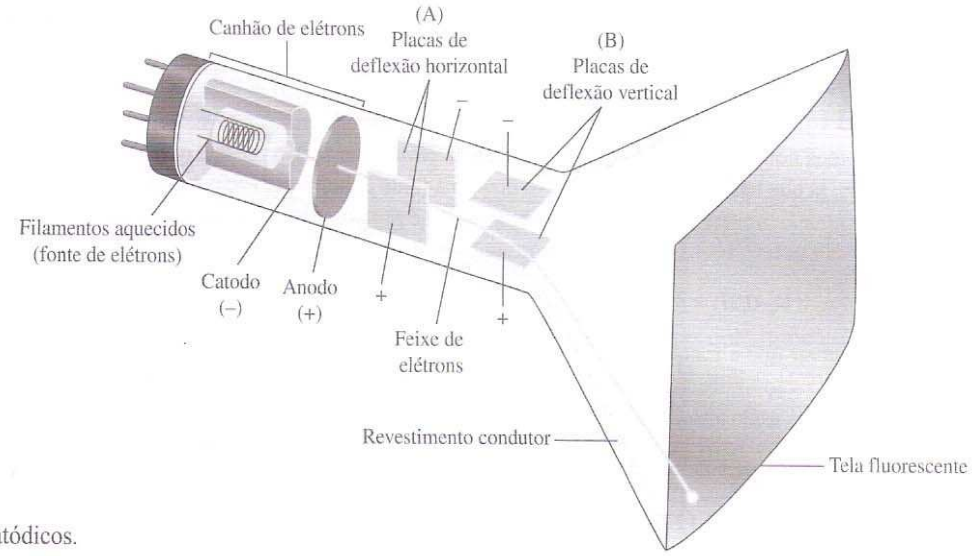


Figura 1.17 Tubo de raios catódicos.

EXEMPLO 1.8

O fluxo de elétrons em um tubo de imagem de TV carrega 10^{15} elétrons por segundo. Como engenheiro de projeto, determine a tensão V_0 necessária para acelerar o feixe de elétrons para atingir 4 W.

Solução: A carga de um elétron é

$$e = -1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Se o número de elétrons for n, então $q = ne$ e

$$i = \frac{dq}{dt} = e\frac{dn}{dt} = (-1{,}6 \times 10^{-19})(10^{15}) = -1{,}6 \times 10^{-4}\ \text{A}$$

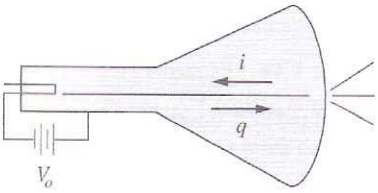


Figura 1.18 Um diagrama simplificado do tubo de raios catódicos para o Exemplo 1.8.

O sinal negativo indica que a corrente vai no sentido oposto ao fluxo de elétrons, conforme indicado na Figura 1.18, que é um diagrama simplificado do CRT para o caso em que as placas de deflexão verticais não transportam nenhuma carga. A potência do feixe é

$$p = V_o i \qquad \text{ou} \qquad V_o = \frac{p}{i} = \frac{4}{1{,}6 \times 10^{-4}} = 25.000\ \text{V}$$

Portanto, a tensão necessária é 25 kV.

PROBLEMA PRÁTICO 1.8

Se um fluxo de elétrons em um tubo de imagem de TV carrega 10^{13} elétrons/segundo e passa por placas mantidas a uma diferença de potencial de 30 kV, calcule a potência do fluxo.

Resposta: 48 mW.

1.7.2 Contas de consumo de energia elétrica*

A segunda aplicação trata sobre a maneira como uma concessionária de energia elétrica cobra seus clientes. O custo da eletricidade depende da quantidade de energia consumida em quilowatts-hora (kWh). (Outros fatores que

* N. de T.: O leitor deve levar em consideração que a política de cobrança para o fornecimento de energia elétrica se refere aos Estados Unidos. Entretanto, como exemplo de aplicação, o item é válido.

PERFIS HISTÓRICOS

Karl Ferdinand Braun (1850-1918), da Universidade de Strasbourg, inventou o tubo de raios catódicos Braun, em 1879, que se tornou a base para o tubo de imagem usado por tantos anos em televisores. Ele ainda é, hoje, o dispositivo mais econômico, embora o preço de sistemas com telas planas esteja rapidamente se tornando competitivo. Antes de o tubo de Braun ser usado nos televisores, foi necessária a inventividade de **Vladimir K. Zworykin** (1889-1982) para desenvolver o iconoscópio de modo que a televisão moderna se transformasse em realidade. O iconoscópio evoluiu para o orticonoscópio e o orticonoscópio de imagem, que permitiu que imagens fossem capturadas e convertidas em sinais que poderiam ser enviados para o televisor.

afetam o custo são os de potência e demanda; por enquanto os ignoraremos.) Porém, mesmo que um consumidor não use nenhuma energia, existe uma tarifa mínima que o cliente deverá pagar, pois custa dinheiro mantê-lo conectado à rede de energia elétrica. À medida que o consumo aumenta, o custo por kWh diminui. É interessante observar o consumo médio mensal de eletrodomésticos de uma família constituída por cinco pessoas, conforme mostrado na Tabela 1.3.

Tabela 1.3 • Média mensal do consumo-padrão de eletrodomésticos.

Aparelho	Consumo em kWh	Aparelho	Consumo em kWh
Aquecedor de água	500	Máquina de lavar roupa	120
Freezer	100	Fogão elétrico	100
Iluminação	100	Secadora	80
Máquina de lavar louça	35	Forno de micro-ondas	25
Ferro de passar	15	Computador	12
TV	10	Rádio	8
Torradeira	4	Relógio	2

EXEMPLO 1.9

Um domicílio consome 700 kWh em janeiro. Determine o valor da conta de eletricidade para o mês usando a seguinte escala tarifária residencial:

- Tarifa mensal básica de US$ 12,00.
- O custo mensal dos primeiros 100 kWh é de 16 centavos/kWh.
- O custo mensal dos 200 kWh seguintes é de 10 centavos/kWh.
- O custo mensal dos 300 kWh seguintes é de 6 centavos/kWh.

Solução: Calculamos a conta de energia elétrica como segue.

Tarifa básica mensal = US$ 12,00

Primeiros 100 kWh a US$ 0,16/kWh = US$ 16,00

Os 200 kWh seguintes a US$ 0,10/kWh = US$ 20,00

Os 400 kWh restantes a US$ 0,06/kWh = US$ 24,00

Valor final da conta = US$ 72,00

$$\text{Custo médio} = \frac{\text{US\$72}}{100 + 200 + 400} = 10{,}2 \text{ centavos/kWh}$$

PROBLEMA PRÁTICO 1.9

Referindo-se à tarifa mensal residencial do Exemplo 1.9, calcule o custo médio por kWh se apenas 350 kWh forem consumidos em julho quando a família está na maior parte desse período viajando.

Resposta: 14,571 centavos/kWh.

1.8 †Resolução de problemas

Embora os problemas a serem resolvidos durante a carreira de um profissional variem de acordo com a complexidade e a magnitude, os princípios básicos a serem seguidos permanecem os mesmos. O processo descrito aqui é o desenvolvido pelos autores ao longo de vários anos de resolução de problemas com seus alunos, de questões de engenharia na indústria e para resolução de problemas na área de pesquisa.

Enumeraremos as seguintes etapas de forma simples e, em seguida, de forma mais elaborada.

1. **Defina** cuidadosamente o problema.
2. **Apresente** tudo o que você sabe sobre o problema.
3. Estabeleça um conjunto de soluções **alternativas** e determine aquela que promete a maior probabilidade de sucesso.
4. **Tente** uma solução para o problema.
5. **Avalie** a solução e verifique sua precisão.
6. O problema foi resolvido de forma **satisfatória**? Em caso positivo, apresente a solução; caso contrário, volte então à etapa 3 e retome o processo.

1. ***Defina*** *cuidadosamente o problema.* Esta pode ser a etapa mais importante do processo, pois é a base para todas as etapas restantes. Em geral, a apresentação de problemas de engenharia é um tanto incompleta. Você deve fazer tudo o que pode para certificar-se de que entendeu o problema por completo da forma como aquele que lhe apresentou o compreenda. Neste ponto, o tempo gasto identificando claramente o problema poupará tempo considerável e uma futura frustração. Como estudante, você pode esclarecer o enunciado do problema em um livro didático, pedindo ao professor para ajudá-lo a compreendê-lo melhor. Um problema com o qual você vai se deparar na vida profissional pode exigir que você consulte várias pessoas. Nesta etapa, é importante desenvolver perguntas que precisem ser feitas antes de continuar o processo de solução. Se tiver perguntas como essas, você precisa consultar pessoas ou recursos apropriados para obter as respectivas respostas. Com isso, é possível refinar o problema e usar esse aprimoramento como enunciado da questão para o restante do processo de solução.
2. ***Apresente*** *tudo o que sabe sobre o problema.* Agora você está pronto para escrever tudo o que sabe sobre o problema e suas soluções possíveis. Esta etapa importante poupará tempo e uma futura frustração.
3. *Estabeleça um conjunto de soluções* ***alternativas*** *e determine aquela que promete a maior probabilidade de sucesso.* Quase todo problema terá uma série de caminhos possíveis que o levarão a uma solução. É altamente desejável identificar o maior número de caminhos possíveis. Neste ponto,

você também precisa determinar que ferramentas estão disponíveis como *PSpice* e *MATLAB* e outros pacotes de *software* que podem reduzir enormemente o esforço e aumentar a precisão. Novamente, temos de enfatizar que o tempo gasto definindo cuidadosamente o problema e investigando abordagens alternativas para sua solução renderá muitos dividendos mais tarde. Avaliar as alternativas e determinar quais prometem a maior probabilidade de sucesso pode ser difícil, porém valerá o esforço. Documente bem esse processo, pois, certamente, você voltará a ele, caso a primeira abordagem não funcione.

4. ***Tente** uma solução para o problema.* Este é o momento de realmente começar a resolver o problema. O processo seguido deve ser bem documentado de modo a apresentar uma solução detalhada se bem-sucedida, e para avaliar o processo caso não tenha êxito. Essa avaliação detalhada pode levá-lo a correções que o conduzirão a uma melhor solução. Ela também poderá levar a novas alternativas a serem experimentadas. Muitas vezes, é prudente configurar uma solução antes de colocar números nas equações. Isso nos ajudará a verificar os resultados.
5. ***Avalie** a solução e verificar sua precisão.* Agora avalie completamente o que conseguiu realizar. Decida se tem uma solução aceitável em mãos, uma que você queira apresentar à sua equipe, ao gerente ou ao professor.
6. *O problema foi resolvido de forma **satisfatória**? Em caso positivo, apresente a solução; caso contrário, retome à etapa 3 e retome o processo.* Agora você precisa apresentar sua solução ou tentar outra saída. Neste ponto, concluir o problema pode levá-lo ao encerramento do processo. Entretanto, muitas vezes a apresentação de uma solução leva a um maior aprimoramento da definição do problema e o processo continua. Seguir esse processo pode, finalmente, levar a uma conclusão satisfatória.

Examinemos agora esse processo considerando um aluno de curso básico de engenharia elétrica ou de computação. (O processo básico também se aplica a praticamente qualquer curso de engenharia.) Tenha em mente que, embora as etapas tenham sido simplificadas para aplicar aos tipos de problemas acadêmicos, o processo, conforme mencionado, sempre precisa ser seguido. Consideremos um exemplo simples.

EXEMPLO 1.10

Determine a corrente que flui pelo resistor de 8 ohms (Ω) da Figura 1.19.

Solução:

1. ***Defina** cuidadosamente o problema.* Trata-se apenas de um exemplo simples, porém já podemos constatar que não sabemos a polaridade da fonte de 3 V. Temos as seguintes opções: (1) podemos perguntar ao professor qual deve ser a polaridade; (2) se não tivermos condições de perguntar a ele, então precisamos tomar uma decisão sobre o que fazer em seguida; (3) se tivermos tempo para trabalhar o problema de ambas as formas, podemos encontrar a corrente quando a fonte de 3 V for positiva na parte superior e, em seguida, positiva na parte inferior; (4) se não tivermos tempo suficiente para experimentar ambas as maneiras, suponha uma polaridade e então documente de forma cuidadosa sua decisão; (5) vamos supor que o professor informe que o sinal positivo seja na parte inferior, conforme ilustrado na Figura 1.20.
2. ***Apresente** tudo o que você sabe sobre o problema.* Apresentar tudo o que você sabe sobre o problema envolve identificar claramente o circuito de modo a definir o que buscamos.

   Dado o circuito exibido na Figura 1.20, calcule $i_{8\Omega}$.

   Agora verificamos com o professor se o problema está definido apropriadamente.

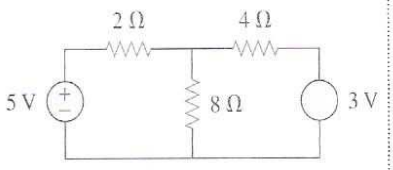


Figura 1.19 Exemplo ilustrativo.

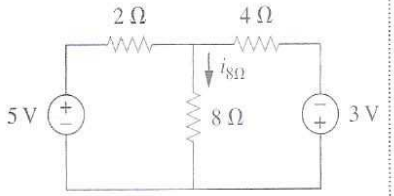


Figura 1.20 Definição do problema.

3. *Estabeleça um conjunto de soluções* ***alternativas*** *e determine aquela que promete a maior probabilidade de sucesso.* Há, basicamente, três técnicas que podem ser usadas para solucionar esse problema. Mais adiante, veremos que é possível utilizar análise de circuitos (leis de Kirchhoff e lei de Ohm), análise nodal e análise de malha.

   O cálculo de $i_{8\Omega}$ usando análise de circuitos nos levará a uma solução no final, mas, provavelmente, dará muito mais trabalho que as análises nodal ou de malhas. Para calcular $i_{8\Omega}$ pela análise de malhas, é necessário escrever duas equações simultâneas que determinam as duas correntes de laço indicadas na Figura 1.21. O emprego da análise nodal requer uma equação de apenas uma incógnita. Essa é a forma mais fácil.

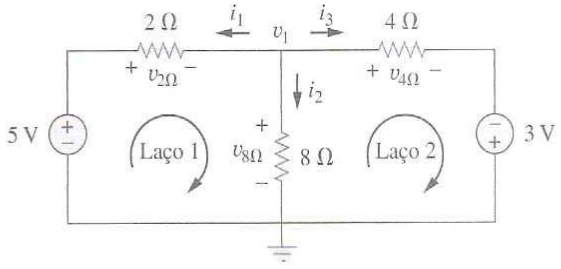


Figura 1.21 Emprego da análise nodal.

Portanto, encontraremos $i_{8\Omega}$ por meio da análise nodal.

4. ***Tente*** *uma solução para o problema.* Primeiro, escrevemos todas as equações necessárias de modo a encontrar $i_{8\Omega}$.

$$i_{8\Omega} = i_2, \qquad i_2 = \frac{v_1}{8}, \qquad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8}$$

$$\frac{v_1 - 5}{2} + \frac{v_1 - 0}{8} + \frac{v_1 + 3}{4} = 0$$

Agora, podemos calcular v_1.

$$8\left[\frac{v_1 - 5}{2} + \frac{v_1 - 0}{8} + \frac{v_1 + 3}{4}\right] = 0$$

o que nos leva a $(4v_1 - 20) + (v_1) + (2v_1 + 6) = 0$

$$7v_1 = +14, \qquad v_1 = +2\ \text{V}, \qquad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8} = \frac{2}{8} = \mathbf{0{,}25\ A}$$

5. ***Avalie*** *a solução e verifique sua precisão.* Agora, podemos usar as leis de Kirchhoff para verificar os resultados.

$$i_1 = \frac{v_1 - 5}{2} = \frac{2 - 5}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5\ \text{A}$$

$$i_2 = i_{8\Omega} = 0{,}25\ \text{A}$$

$$i_3 = \frac{v_1 + 3}{4} = \frac{2 + 3}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25\ \text{A}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = \mathbf{-1{,}5 + 0{,}25 + 1{,}25 = 0} \quad \text{(Verificado)}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensão no laço 1,

$$\begin{aligned} -5 + v_{2\Omega} + v_{8\Omega} &= -5 + (-i_1 \times 2) + (i_2 \times 8) \\ &= -5 + [-(-1{,}5)2] + (0{,}25 \times 8) \\ &= \mathbf{-5 + 3 + 2 = 0} \quad \text{(Verificado)} \end{aligned}$$

Aplicando a lei e Kirchhoff para tensão no laço 2,

$$-v_{8\Omega} + v_{4\Omega} - 3 = -(i_2 \times 8) + (i_3 \times 4) - 3$$
$$= -(0{,}25 \times 8) + (1{,}25 \times 4) - 3$$
$$= -2 + 5 - 3 = 0 \quad \text{(Verificado)}$$

Portanto, agora temos um grau de confiança muito grande na precisão de nossa resposta.

6. *O problema foi resolvido de forma* ***satisfatória****? Em caso positivo, apresente a solução; caso contrário, retorne à etapa 3 e retome o processo.* Nesse caso, o problema foi resolvido de forma satisfatória.

A corrente que passa pelo resistor de 8 Ω é de 0,25 A fluindo para baixo através do resistor de 8 Ω.

PROBLEMA PRÁTICO 1.10

Tente aplicar esse processo para alguns dos problemas mais difíceis no final do capítulo.

1.9 Resumo

1. Um circuito elétrico consiste em elementos elétricos conectados entre si.
2. O Sistema Internacional de Unidades (SI) é a linguagem de medida internacional que permite aos engenheiros informarem seus resultados. A partir de seis unidades principais podem ser derivadas as unidades de outras grandezas físicas.
3. Corrente é o fluxo de carga por unidade de tempo.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

4. Tensão é a energia necessária para deslocar 1 C de carga através de um elemento.

$$v = \frac{dw}{dq}$$

5. Potência é a energia fornecida ou absorvida por unidade de tempo. Ela também é o produto da tensão pela corrente.

$$p = \frac{dw}{dt} = vi$$

6. De acordo com a convenção de sinal passivo, adota-se um sinal positivo para a potência quando a corrente entra pelo terminal de polaridade positiva da tensão em um elemento.
7. Uma fonte de tensão ideal produz uma diferença de potencial específica entre seus terminais independentemente do que estiver conectado a ela. Uma fonte de corrente ideal produz uma corrente específica através de seus terminais, não interessando o que está conectado a ela.
8. As fontes de corrente e tensão podem ser dependentes ou independentes. Uma fonte dependente é aquela cujo valor depende de algum outro circuito variável.
9. Duas áreas de aplicação dos conceitos vistos neste capítulo são o tubo de imagem de TV e o procedimento de cobrança pelo fornecimento de energia elétrica.

Questões para revisão

1.1 Um milivolt é um milionésimo de um volt.

(a) verdadeiro (b) falso

1.2 O prefixo *micro* significa:

(a) 10^6 (b) 10^3
(c) 10^{-3} (d) 10^{-6}

1.3 A tensão 2.000.000 V pode ser expressa em potência de 10 como:

(a) 2 mV (b) 2 kV
(c) 2 MV (d) 2 GV

1.4 Uma carga de 2 C fluindo por um dado ponto a cada segundo é uma corrente de 2 A.

(a) verdadeiro (b) falso

1.5 A unidade de corrente é:

(a) coulomb (b) ampère
(c) volt (d) joule

1.6 A tensão é medida em:

(a) watts (b) ampères
(c) volts (d) joules por segundo

1.7 Uma corrente de 4 A carregando um material dielétrico acumulará uma carga de 24 C após 6 s.

(a) verdadeiro (b) falso

1.8 A tensão em uma torradeira de 1,1 kW que produz uma corrente de 10 A é:

(a) 11 kV (b) 1100 V
(c) 110 V (d) 11 V

1.9 Qual das seguintes opções não é uma grandeza elétrica?

(a) carga (b) tempo
(c) tensão (d) corrente
(e) potência

1.10 A fonte dependente na Figura 1.22 é:

(a) fonte de corrente controlada por tensão
(b) fonte de tensão controlada por tensão
(c) fonte de tensão controlada por corrente
(d) fonte de corrente controlada por corrente

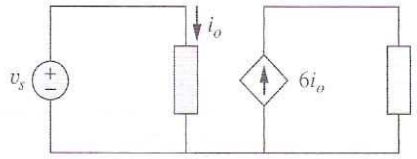


Figura 1.22 Esquema para a Questão para revisão 1.10.

Respostas: 1.1b, 1.2d, 1.3c, 1.4a, 1.5b, 1.6c, 1.7a, 1.8c, 1.9b, 1.10d.

Problemas

Seção 1.3 Carga e corrente

1.1 Quantos coulombs são representados pelas seguintes quantidades de elétrons?

(a) $6{,}482 \times 10^{17}$ (b) $1{,}24 \times 10^{18}$
(c) $2{,}46 \times 10^{19}$ (d) $1{,}628 \times 10^{20}$

1.2 Determine a corrente que flui por um elemento se o fluxo de carga for dado por

(a) $q(t) = (3t + 8)$ mC
(b) $q(t) = (8t^2 + 4t - 2)$ C
(c) $q(t) = (3e^{-t} - 5e^{-2t})$ nC
(d) $q(t) = 10 \operatorname{sen} 120\pi t$ pC
(e) $q(t) = 20e^{-4t} \cos 50t\,\mu$C

1.3 Determine a carga $q(t)$ que flui por um dispositivo se a corrente for:

(a) $i(t) = 3$ A, $q(0) = 1$ C
(b) $i(t) = (2t + 5)$ mA, $q(0) = 0$
(c) $i(t) = 20 \cos(10t + \pi/6)\,\mu$A, $q(0) = 2\,\mu$C
(d) $i(t) = 10e^{-30t} \operatorname{sen} 40t$ A, $q(0) = 0$

1.4 Uma corrente de 7,4 A passa por um condutor. Calcule qual a carga que passa através de qualquer seção transversal desse condutor em 20 s.

1.5 Determine a carga total transferida ao longo do intervalo $0 \leq t \leq 10$ s quando $i(t) = \frac{1}{2}t$ A.

1.6 A carga que entra em determinado elemento é mostrada na Figura 1.23. Determine a corrente em:

(a) $t = 1$ ms
(b) $t = 6$ ms
(c) $t = 10$ ms

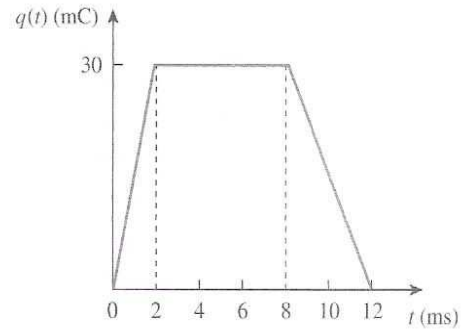


Figura 1.23 Esquema para o Problema 1.6.

1.7 A carga que flui por um fio é representada na Figura 1.24. Represente a corrente correspondente.

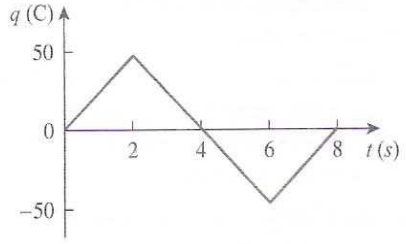


Figura 1.24 Esquema para o Problema 1.7.

1.8 A corrente que flui por um ponto em um dispositivo é mostrada na Figura 1.25. Calcule a carga total através do ponto.

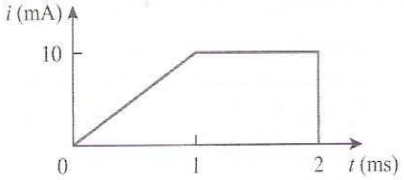


Figura 1.25 Esquema para o Problema 1.8.

1.9 A corrente através de um elemento é ilustrada na Figura 1.26. Determine a carga total que passa pelo elemento em:

(a) $t = 1$ s (b) $t = 3$ s (c) $t = 5$ s

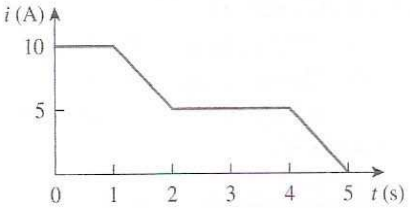


Figura 1.26 Esquema para o Problema 1.9.

• Seções 1.4 e 1.5 Tensão, potência e energia

1.10 Um raio com 10 kA atinge um objeto por 15 μs. Quanta carga é depositada sobre o objeto?

1.11 Uma bateria recarregável para lanterna é capaz de liberar 90 mA por cerca de 12 h. Quanta carga ela é capaz de liberar a essa taxa? Se a tensão em seus terminais for de 1,5 V, quanta energia a bateria pode liberar?

1.12 Se a corrente que passa através de um elemento for dada por

$$i(t) = \begin{cases} 3t\text{A}, & 0 \leqq t < 6\text{ s} \\ 18\text{A}, & 6 \leqq t < 10\text{ s} \\ -12\text{A}, & 10 \leqq t < 15\text{ s} \\ 0, & t \geqq 15\text{ s} \end{cases}$$

Faça um gráfico da carga armazenada no elemento durante o intervalo $0 < t < 20$ s.

1.13 A carga que entra pelo terminal positivo de um elemento é

$$q = 5 \operatorname{sen} 4\pi\, t\text{ mC}$$

enquanto a tensão nesse elemento (do positivo para o negativo) é

$$v = 3 \cos 4\pi\, t\text{ V}$$

(a) Determine a potência liberada para o elemento em $t = 0{,}3$ s.

(b) Calcule a energia liberada para o elemento entre 0 e 0,6 s.

1.14 A tensão v em um dispositivo e a corrente i através dele são

$$v(t) = 10 \cos 2t\text{ V}, \qquad i(t) = 20(1 - e^{-0.5t})\text{ mA}$$

Calcule:

(a) A carga total no dispositivo em $t = 1$ s.

(b) A potência consumida pelo dispositivo em $t = 1$ s.

1.15 A corrente que entra pelo terminal positivo de um dispositivo é $i(t) = 6e^{-2t}$ mA e a tensão neste mesmo dispositivo é $v(t) = 10\,di/dt$ V.

(a) Determine a carga liberada para o dispositivo entre $t = 0$ e $t = 2$ s.

(b) Calcule a potência absorvida.

(c) Determine a energia absorvida em 3 s.

• Seção 1.6 Elementos de circuito

1.16 A Figura 1.27 mostra a corrente e a tensão em um dispositivo.

(a) Esboce o gráfico da potência liberada para o dispositivo para $t > 0$.

(b) Determine a energia total absorvida pelo dispositivo para o período $0 < t < 4$ s.

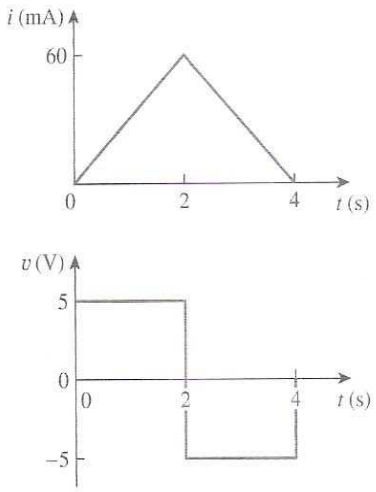


Figura 1.27 Esquema para o Problema 1.16.

1.17 A Figura 1.28 ilustra um circuito com cinco elementos. Se $p_1 = -205$ W, $p_2 = 60$ W, $p_4 = 45$ W, $p_5 = 30$ W, calcule a potência p_3 recebida ou liberada pelo elemento 3.

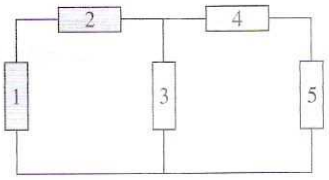


Figura 1.28 Esquema para o Problema 1.17.

1.18 Determine a potência absorvida em um dos elementos da Figura 1.29.

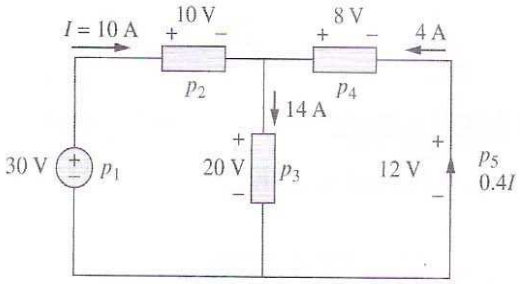


Figura 1.29 Esquema para o Problema 1.18.

1.19 Determine I para o circuito da Figura 1.30.

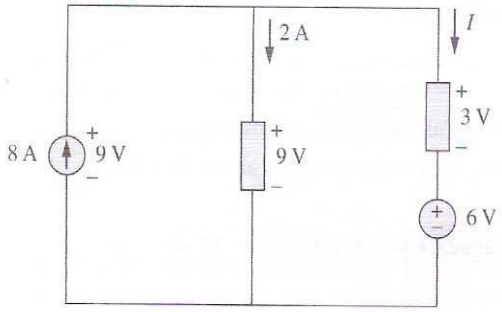


Figura 1.30 Esquema para o Problema 1.19.

1.20 Determine V_0 e a potência absorvida por cada elemento no circuito da Figura 1.31.

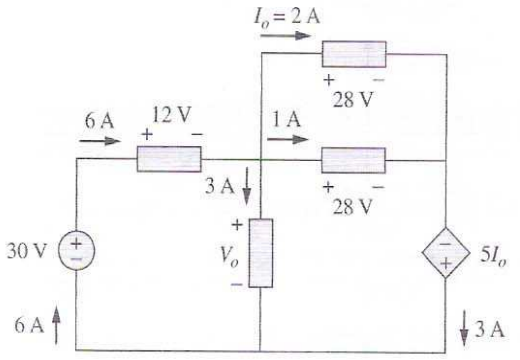


Figura 1.31 Esquema para o Problema 1.20.

Seção 1.7 Aplicações

1.21 Uma lâmpada incandescente de 60 W opera em 120 V. Quantos elétrons e coulombs fluem através da lâmpada em um dia?

1.22 Um raio de 40 kA atinge um avião durante 1,7 ms. Quantos coulombs de carga são depositados no avião?

1.23 Um aquecedor elétrico de 1,8 kWh leva 15 min para ferver certa quantidade de água. Se isto for feito uma vez por dia e a eletricidade custar 10 centavos/kWh, qual o custo de sua operação durante 30 dias?

1.24 Uma concessionária de energia elétrica cobra 8,2 centavos/kWh. Se um consumidor manter ligada continuamente uma lâmpada de 60 W por um dia, qual será a tarifa cobrada do consumidor?

1.25 Uma torradeira de 1,5 kW leva em torno de 3,5 minutos para tostar quatro fatias de pão. Determine o custo do uso da torradeira uma vez ao dia por um mês (30 dias). Considere que a energia elétrica custe 8,2 centavos/kWh.

1.26 Uma pilha de lanterna tem um consumo de 0,8 ampères-hora (Ah) e uma vida útil de 10 horas.

(a) Qual é a quantidade de corrente por ela liberada?

(b) Quanta potência ela pode fornecer se a tensão entre seus terminais for de 6 V?

(c) Quanta energia é armazenada na bateria em Wh?

1.27 É necessária uma corrente contínua de 3 A por 4 horas para carregar uma bateria de automóvel. Se a tensão entre os polos da bateria for de $10 + t/2$ V, onde t é expresso em horas,

(a) Quanta carga é transportada como resultado do carregamento?

(b) Quanta energia é consumida?

(c) Qual é o custo para a carga da bateria? Suponha que a eletricidade custe 9 centavos/kWh.

1.28 Uma lâmpada incandescente de 60 W está conectada a uma fonte de 120 V e é deixada ligada continuamente em uma escadaria anteriormente escura. Determine:

(a) A corrente que passa pela lâmpada.

(b) O custo de deixar a lâmpada ligada ininterruptamente por um ano não bissexto se a eletricidade custa 9,5 centavos kWh.

1.29 Um fogão elétrico com quatro queimadores e um forno é usado no preparo de uma refeição como segue:

Queimador 1: 20 minutos Queimador 2: 40 minutos

Queimador 3: 15 minutos Queimador 4: 45 minutos

Forno: 30 minutos

Se cada queimador tem uma classificação de 1,2 kW e o forno de 1,8 kW e a energia elétrica tem um custo de 12 centavos por kWh, calcule o custo da energia elétrica utilizada no preparo dessa refeição.

1.30 A Reliant Energy (companhia de energia elétrica de Houston, Texas) cobra de seus consumidores o seguinte:

- Tarifa mensal US$ 6
- Primeiros 250 kWh a US$ 0,02/kWh
- Todos os kWh adicionais a US$ 0,07/kWh

Se um consumidor usar 2,436 kWh em um mês, quanto a Reliant Energy cobrará?

1.31 Em uma residência, um computador pessoal (PC) de 120 W é usado 4 h/dia, enquanto uma lâmpada de 60 W fica ligada 8 h/dia. Se a concessionária de energia elétrica cobra US$ 0,12/kW, calcule quanto essa residência paga por ano com o PC e a lâmpada.

Problemas abrangentes

1.32 Um fio telefônico tem uma corrente de 20 μA passando por ele. Quanto tempo leva para uma carga de 15 C passar pelo fio?

1.33 Um relâmpago transportou uma corrente de 2 kA e durou 3 ms. Quantos coulombs de carga estavam contidos no relâmpago?

1.34 A Figura 1.32 mostra o consumo de energia de determinada residência em 1 dia. Calcule:

(a) A energia total consumida em kW.

(b) A potência média por hora durante um período de 24 horas.

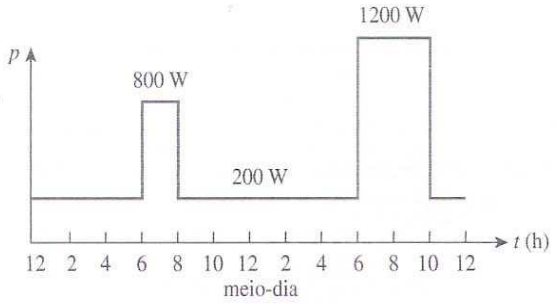


Figura 1.32 Esquema para o Problema 1.34.

1.35 O gráfico da Figura 1.33 representa a potência absorvida por uma planta industrial entre as 8 h e 8h30 da manhã. Calcule a energia total em MWh consumida pela planta.

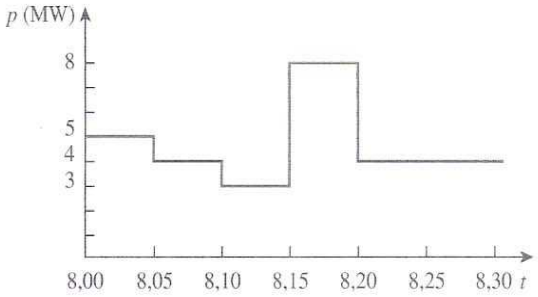


Figura 1.33 Esquema para o Problema 1.35.

1.36 Uma bateria pode ser classificada em ampères-hora (Ah). Uma bateria chumbo-ácida está na faixa de 160 Ah.

(a) Qual a corrente máxima que ela é capaz de fornecer por 40 h?

(b) Quantos dias ela vai durar se ela for descarregada a 1 mA?

1.37 Uma bateria de 12 V requer uma carga total de 40 Ah durante sua recarga. Quantos joules são fornecidos para a bateria?

1.38 Quanta energia é liberada por um motor de 10 HP em 30 minutos? Considere que 1 cavalo-vapor = 746 W.

1.39 Um televisor de 600 W é ligado por 4 h sem que ninguém esteja assistindo. Se a eletricidade custa 10 centavos/kWh, qual o valor desperdiçado?

2

LEIS BÁSICAS

Existem muitas pessoas orando para que as montanhas de dificuldades sejam removidas, quando o que elas realmente precisam é de coragem para escalá-las.

Autor desconhecido

Progresso profissional

Critérios ABET EC 2000 (3.b), "habilidade em projetar um sistema, componente ou processo para atender às necessidades desejadas".

Os engenheiros devem projetar e realizar experimentos, bem como analisar e interpretar dados. A maior parte dos estudantes dedica horas fazendo experimentos no colégio e na faculdade, por isso é comum esperar que você tenha prática nessas atividades. Minha sugestão é que, ao realizar experimentos no futuro, você invista mais tempo na análise e interpretação de dados.

E qual é o significado disso tudo? Se estiver examinando um gráfico da tensão *versus* resistência ou da corrente *versus* resistência ou ainda da potência *versus* resistência, o que você realmente verá? A curva faz sentido? Ela concorda com o que diz a teoria? Ela difere do esperado e, em caso positivo, por quê? Claramente, essa prática com dados aperfeiçoará sua habilidade.

E como você poderia desenvolvê-la e aperfeiçoá-la sendo que todos os experimentos em estudos exigem pouca ou nenhuma prática ao realizá-los?

Na verdade, desenvolver essa qualidade sob essa condição não é tão difícil quanto parece. O que, de fato, precisa ser feito é analisar o experimento, subdividi-lo em partes mais simples, reconstruí-lo tentando compreender por que cada elemento se encontra ali e, finalmente, determinar o que o autor está tentando lhe passar. Muito embora isso nem sempre possa acontecer, todo experimento que se realiza foi concebido por alguém que realmente estava motivado a lhe ensinar algo.

2.1 Introdução

O Capítulo 1 apresentou conceitos básicos como corrente, tensão e potência em um circuito elétrico. Determinar de forma efetiva os valores dessas variáveis em dado circuito requer a interpretação de algumas leis fundamentais que regem os circuitos elétricos, como a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff.

Neste capítulo, além dessas leis, discutiremos algumas técnicas normalmente aplicadas no projeto e análise de circuitos. Entre tais técnicas temos a associação de resistores em série ou em paralelo, divisão de tensão, divisão de corrente e transformações delta-Y (ou triângulo-estrela) e Y-delta (ou estrela-triângulo). A aplicação dessas leis e técnicas se restringirá a circuitos resistivos. No final, vamos aplicá-las em casos reais, como iluminação elétrica e projeto de medidores CC.

2.2 Lei de Ohm

Os materiais geralmente possuem um comportamento característico de resistir ao fluxo de carga elétrica. Essa propriedade física, ou habilidade, é conhecida como *resistência* e é representada pelo símbolo R. A resistência de qualquer material com uma área da seção transversal (A) uniforme depende de A e de seu comprimento ℓ, conforme mostrado na Figura 2.1*a*. Podemos representar a resistência (conforme medição em laboratório), na forma matemática a seguir,

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \tag{2.1}$$

onde ρ é conhecida como *resistividade* do material em ohms-metro. Bons condutores, como cobre e alumínio, possuem baixa resistividade, enquanto isolantes, como mica e papel, têm alta resistividade. A Tabela 2.1 apresenta os

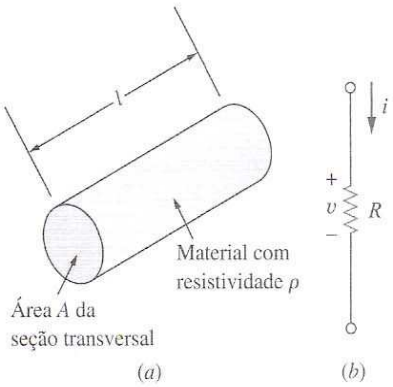


Figura 2.1 (*a*) Resistor; (*b*) símbolo de resistência usado em circuitos.

Tabela 2.1 • Resistividade de alguns materiais comuns.

Material	Resistividade (Ω · m)	Emprego
Prata	$1{,}64 \times 10^{-8}$	Condutor
Cobre	$1{,}72 \times 10^{-8}$	Condutor
Alumínio	$2{,}8 \times 10^{-8}$	Condutor
Ouro	$2{,}45 \times 10^{-8}$	Condutor
Carbono	4×10^{-5}	Semicondutor
Germânio	47×10^{-2}	Semicondutor
Silício	$6{,}4 \times 10^{2}$	Semicondutor
Papel	10^{10}	Isolante
Mica	5×10^{11}	Isolante
Vidro	10^{12}	Isolante
Teflon	3×10^{12}	Isolante

valores de ρ para alguns materiais comuns e mostra quais materiais são usados como condutores, isolantes e semicondutores.

O elemento de circuito usado para modelar o comportamento da resistência à corrente de um material é o *resistor*. Para poder construir os circuitos, os resistores normalmente são feitos de folhas metálicas e compostos de carbono. O símbolo de resistor é mostrado na Figura 2.1*b*, onde R significa a resistência do resistor, e ele é o elemento passivo mais simples.

Credita-se a Georg Simon Ohm (1787-1854), físico alemão, a descoberta da relação entre corrente e tensão para um resistor. Essa relação é conhecida como *lei de Ohm*.

A lei de Ohm afirma que a tensão v em um resistor é diretamente proporcional à corrente i através dele.

Isto é,

$$v \propto i \tag{2.2}$$

Ohm definiu a constante de proporcionalidade para um resistor como a resistência R. (Resistência é uma propriedade de material que pode mudar caso as condições internas ou externas do elemento sejam alteradas, por exemplo, se houver mudanças na temperatura.) Consequentemente, a Equação (2.2) fica

$$\boxed{v = iR} \tag{2.3}$$

que é a forma matemática da lei de Ohm. R na Equação (2.3) é medida na unidade de ohms, designada Ω. Portanto,

A ***resistência R*** de um elemento representa sua capacidade de resistir ao fluxo de corrente elétrica; ela é medida em ohms (Ω).

Considerando a Equação (2.3), podemos deduzir que

$$R = \frac{v}{i} \tag{2.4}$$

de modo que

$$1\ \Omega = 1\ \text{V/A}$$

© SSPL via Getty Images

PERFIS HISTÓRICOS

Georg Simon Ohm (1787-1854), físico alemão, determinou experimentalmente, em 1826, as leis mais básicas relacionadas com tensão e corrente em um resistor. O trabalho de Ohm foi rejeitado pelos críticos no começo.

De origem humilde, em Erlangen, Bavaria, lançou-se à pesquisa no campo da eletricidade. Seus esforços resultaram em sua famosa lei. Foi condecorado com a Medalha Copley em 1841 pela Royal Society of London. Em 1849 assumiu o cargo de professor titular de física da Universidade de Munique. Em sua homenagem, a unidade de resistência recebeu o seu sobrenome, Ohm.

Para aplicar a lei de Ohm conforme declarada na Equação (2.3), devemos prestar atenção ao sentido da corrente i e à polaridade da tensão v, que têm de estar de acordo com a convenção de sinal passivo, conforme mostrado na Figura 2.1*b*. Isso implica que a corrente flui de um potencial mais alto para um mais baixo de modo que $v = iR$. Se a corrente fluir de um potencial mais baixo para um mais alto, $v = -iR$.

Uma vez que o valor de R pode variar de zero a infinito, é importante considerarmos os dois possíveis valores extremos de R. Um elemento com $R = 0$ é denominado *curto-circuito*, conforme observado na Figura 2.2*a*. Para um curto-circuito

$$v = iR = 0 \tag{2.5}$$

mostrando que a tensão é zero, mas que a corrente poderia assumir qualquer valor. Na prática, um curto-circuito em geral é um fio de conexão que é, supostamente, um condutor perfeito. Portanto,

Curto-circuito é um elemento de circuito com resistência que se aproxima de zero.

De forma similar, um elemento com $R = \infty$ é conhecido como um circuito aberto, conforme mostrado na Figura 2.2*b*. Para um circuito aberto,

$$i = \lim_{R \to \infty} \frac{v}{R} = 0 \tag{2.6}$$

indicando que a corrente é zero, embora o valor da tensão possa ser qualquer um. Portanto,

Circuito aberto é um elemento de circuito com resistência que se aproxima de infinito.

Um resistor pode ser fixo ou variável, sendo que a maior parte é do tipo fixo, significando que sua resistência permanece constante. Os dois tipos mais comuns de resistores fixos (de fio e compostos) são ilustrados na Figura 2.3. Os resistores compostos são usados quando é necessária resistência elevada. O símbolo para circuito na Figura 2.1*b* é para um resistor fixo. Os resistores variáveis têm resistência ajustável, seu símbolo é exposto na Figura 2.4*a* e um tipo comum é conhecido como *potenciômetro*, com o símbolo mostrado na Figura 2.4*b*, que é um elemento de três terminais com um contato deslizante ou cursor móvel. Deslizando-se o contato, a resistência entre o terminal do contato e os terminais fixos varia. Assim como os resistores fixos, os resistores variáveis podem ser de fio ou de compostos, conforme ilustrado na Figura 2.5. Embora resistores como os mostrados nas Figuras 2.3 e 2.5 sejam usados em

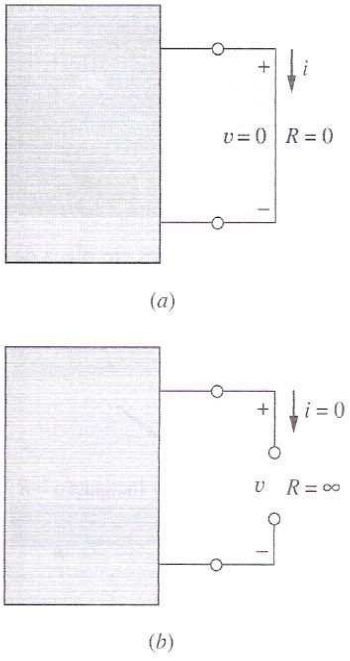


Figura 2.2 (*a*) Curto-circuito ($R = 0$); (*b*) circuito aberto ($R = \infty$).

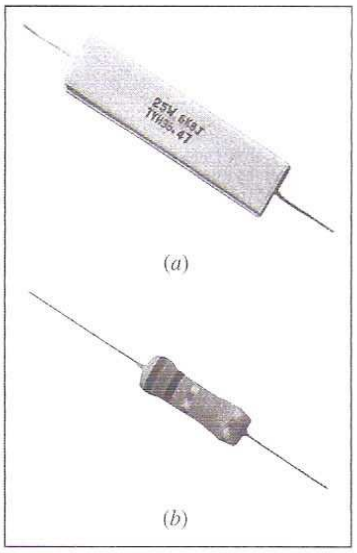


Figura 2.3 Resistores fixos: (*a*) de fio; (*b*) filme de carbono. (*Cortesia da Tech America.*)

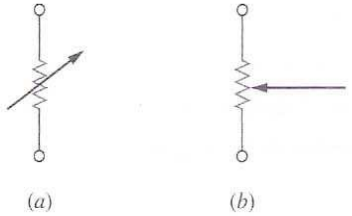


Figura 2.4 Símbolo de circuito para: (*a*) um resistor variável em geral; (*b*) um potenciômetro.

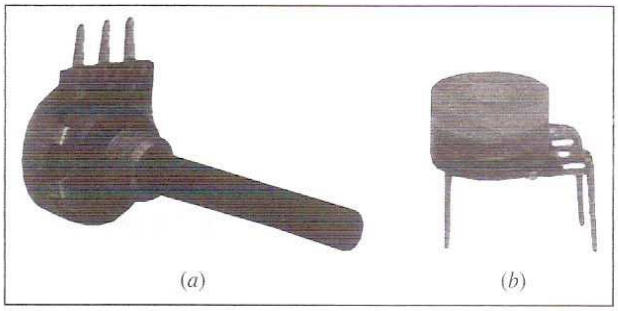


Figura 2.5 Resistores variáveis: (*a*) tipo composto; (*b*) potenciômetro com contato deslizante. (*Cortesia da Tech America.*)

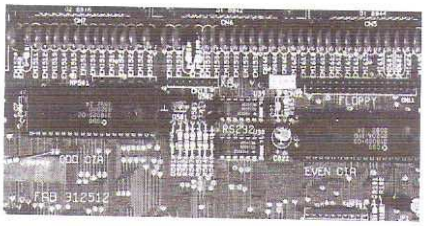


Figura 2.6 Resistores em placa de circuito integrado.

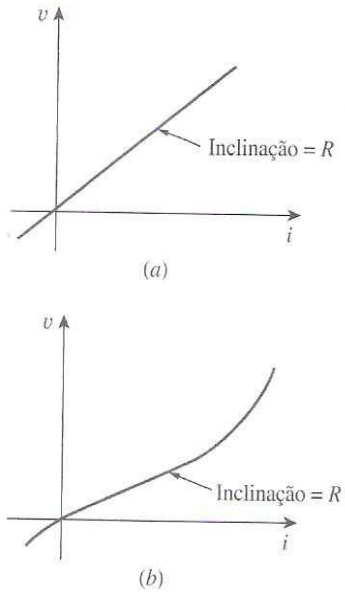


Figura 2.7 A curva característica *i-v* de: (*a*) um resistor linear; (*b*) um resistor não linear.

projetos de circuitos, hoje a maioria dos componentes de circuito, inclusive os resistores, são integrados ou então usam a tecnologia de montagem em superfície, conforme pode ser observado na Figura 2.6.

Devemos destacar que nem todos os resistores obedecem à lei de Ohm, e o que obedece é conhecido como resistor *linear*. Ele tem uma resistência constante e, portanto, apresenta sua curva característica conforme ilustrado na Figura 2.7*a*: seu gráfico *i-v* é uma linha reta que passa pela origem. Já um resistor *não linear* não obedece à lei de Ohm, sua resistência varia com a corrente, e sua curva característica *i-v* é mostrada na Figura 2.7*b*, e como exemplos temos a lâmpada comum e o diodo. Embora todos os resistores na prática possam apresentar comportamento não linear sob certas condições, partiremos do pressuposto, neste livro, de que todos os elementos projetados na realidade como resistores são lineares.

Uma medida útil em análise de circuitos é o inverso da resistência R, conhecida como *condutância*, uma medida que representa quanto um elemento conduz corrente elétrica, e representada por G:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v} \tag{2.7}$$

A unidade de condutância é o *mho* (ohm escrito ao contrário), com símbolo ℧, o ômega invertido. Embora os engenheiros muitas vezes usem o mho, neste livro preferimos utilizar o siemens (S), a unidade SI para condutância:

$$1\ \text{S} = 1\ ℧ = 1\ \text{A/V} \tag{2.8}$$

Portanto,

Condutância é a capacidade de um elemento conduzir corrente elétrica; ela é medida em mho (℧) ou siemens (S).

A mesma resistência pode ser expressa em ohms ou siemens. Por exemplo, 10 Ω é o mesmo que 0,1 S. Da Equação (2.7), podemos escrever

$$i = Gv \tag{2.9}$$

A potência dissipada por um resistor pode ser expressa em termos de R. Usando as Equações (1.7) e (2.3),

$$p = vi = i^2R = \frac{v^2}{R} \tag{2.10}$$

A potência dissipada por um resistor também poderia ser expressa em termos de G como

$$p = vi = v^2G = \frac{i^2}{G} \tag{2.11}$$

Devemos observar dois pontos a partir das Equações (2.10) e (2.11):

1. A potência dissipada em um resistor é uma função não linear da corrente ou tensão.
2. Já que R e G são quantidades positivas, a potência dissipada em um resistor é sempre positiva. Portanto, um resistor sempre absorve potência do

circuito, confirmando a ideia de que é um elemento passivo, incapaz de gerar energia.

EXEMPLO 2.1

Um ferro elétrico drena 2 A em uma tensão de 120 V. Determine a resistência.

Solução: Da lei de Ohm,

$$R = \frac{v}{i} = \frac{120}{2} = 60\ \Omega$$

PROBLEMA PRÁTICO 2.1

O componente essencial de uma tostadeira é um elemento elétrico (um resistor) que converte energia elétrica em energia térmica. Quanta corrente é absorvida por uma torradeira com resistência 15 Ω a 110 V?

Resposta: 7,333 A.

EXEMPLO 2.2

No circuito elétrico mostrado na Figura 2.8, calcule a corrente i, a condutância G e a potência p.

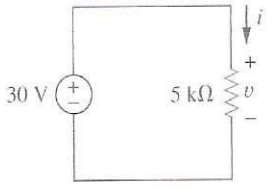


Figura 2.8 Esquema para o Exemplo 2.2.

Solução: A tensão no resistor é a mesma da fonte de tensão (30 V), pois o resistor e a fonte de tensão são conectados ao mesmo par de terminais. Consequentemente, a corrente é

$$i = \frac{v}{R} = \frac{30}{5 \times 10^3} = 6\ \text{mA}$$

A condutância é

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{5 \times 10^3} = 0{,}2\ \text{mS}$$

Podemos calcular a potência de diversas maneiras usando as Equações (1.7), (2.10) ou (2.11).

$$p = vi = 30(6 \times 10^{-3}) = 180\ \text{mW}$$

ou

$$p = i^2R = (6 \times 10^{-3})^2 5 \times 10^3 = 180\ \text{mW}$$

ou

$$p = v^2G = (30)^2 0{,}2 \times 10^{-3} = 180\ \text{mW}$$

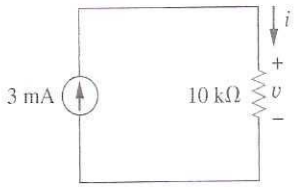


Figura 2.9 Esquema para o Problema prático 2.2.

PROBLEMA PRÁTICO 2.2

Para o circuito mostrado na Figura 2.9, calcule a tensão v, a condutância G e a potência p.

Resposta: 30 V, 100 μS, 90 mW.

EXEMPLO 2.3

Uma fonte de tensão de 20 senπt V é conectada em um resistor de 5 kΩ. Determine a corrente que passa pelo resistor e a potência dissipada.

Solução: $i = \dfrac{v}{R} = \dfrac{20\ \text{sen}\pi t}{5 \times 10^3} = 4\ \text{sen}\ \pi t\ \text{mA}$

Consequentemente,

$$p = vi = 80\ \text{sen}^2 \pi t\ \text{mW}$$

PROBLEMA PRÁTICO 2.3

Um resistor absorve uma potência instantânea de 30 $\cos^2 t$ mW, quando conectado a uma fonte de tensão $v = 15 \cos t$ V. Determine i e R.

Resposta: 2 cos t mA, 7,5 kΩ.

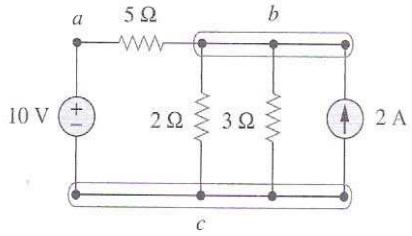


Figura 2.10 Nós, ramos e laços.

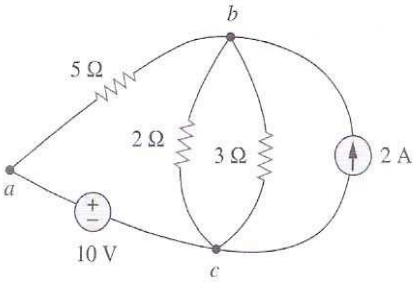


Figura 2.11 Circuito de três nós da Figura 2.10 redesenhado.

2.3 †Nós, ramos e laços

Uma vez que os elementos de um circuito elétrico podem ser interconectados de diversas maneiras, precisamos compreender alguns conceitos básicos de topologia de rede. Para diferenciar um circuito de rede podemos considerar uma rede como interconexão de elementos ou dispositivos, enquanto um circuito é uma rede que fornece um ou mais caminhos fechados. A convenção, ao tratar de topologia de rede, é usar a palavra rede em vez de circuito. Fazemos isso, muito embora essas duas palavras signifiquem a mesma coisa quando usadas neste contexto. Na topologia de rede, estudamos as propriedades relacionadas à colocação de elementos na rede e a configuração geométrica dela. Tais elementos incluem ramos, nós e laços.

Ramo representa um elemento único como fonte de tensão ou resistor.

Em outras palavras, um ramo representa qualquer elemento de dois terminais. O circuito da Figura 2.10 tem cinco ramos, como: a fonte de tensão de 10 V, a fonte de corrente de 2 A e os três resistores.

Nó é o ponto de conexão entre dois ou mais ramos.

Em um circuito, um nó é normalmente indicado por um ponto. Se um curto-circuito (um fio de conexão) conecta dois nós, estes constituem um único nó, e o circuito da Figura 2.10 possui três nós: *a*, *b* e *c*. Observe que os três pontos que formam o nó *b* são conectados por fios perfeitamente condutores e, portanto, compõem um único ponto. O mesmo é verdade para os quatro pontos que formam o nó *c*. Demonstramos que o circuito da Figura 2.10 tem apenas três nós, redesenhando o circuito da Figura 2.11. Os dois circuitos nas Figuras 2.10 e 2.11 são idênticos. Entretanto, para deixar claro, os nós *b* e *c* são interligados por condutores perfeitos, como mostra a Figura 2.10.

Laço é qualquer caminho fechado em um circuito.

Laço é um caminho fechado formado iniciando-se em um nó, passando por uma série de nós e retornando ao nó de partida sem passar por qualquer outro mais de uma vez. Diz-se que um laço é *independente* se ele contiver pelo menos um ramo que não faça parte de qualquer outro laço independente. Os laços, ou caminhos independentes, resultam em conjuntos de equações independentes.

É possível formar um conjunto independente de laços no qual um deles não contém tal ramo. Na Figura 2.11, *abca* com o resistor de 2 Ω é independente. Um segundo laço com o resistor de 3 Ω e a fonte de corrente é independente. O terceiro poderia ser um com o resistor de 2 Ω associado em paralelo com o resistor de 3 Ω, e isso realmente forma um conjunto independente de laços.

Uma rede com *b* ramos, *n* nós e *l* laços independentes vão satisfazer o teorema fundamental da topologia de rede:

$$b = l + n - 1 \tag{2.12}$$

Conforme mostram as duas definições a seguir, a topologia de circuitos é de grande valia no estudo de tensões e correntes em um circuito elétrico.

Dois ou mais elementos estão em **série** se eles compartilharem exclusivamente um único nó e, consequentemente, transportarem a mesma corrente.

Dois ou mais elementos estão em **paralelo** se eles estiverem conectados aos mesmos dois nós e, consequentemente, tiverem a mesma tensão entre eles.

Os elementos estão em série quando estiverem conectados em cadeia ou em sequência, de ponta a ponta. Por exemplo, dois elementos estão em série se compartilharem um nó comum e nenhum outro elemento estiver conectado a esse nó; já os elementos em paralelo são conectados ao mesmo par de terminais. No circuito mostrado na Figura 2.10, a fonte de tensão e o resistor de 5 Ω estão em série, pois a mesma corrente fluirá através deles. Os resistores de 2 Ω e 3 Ω, bem como a fonte de corrente, estão em paralelo, porque estão conectados aos mesmos dois nós (*b* e *c*) e, consequentemente, têm a mesma tensão entre eles. Os resistores de 5 Ω e 2 Ω não estão nem em série nem em paralelo entre si.

EXEMPLO 2.4

Determine o número de ramos e nós no circuito mostrado na Figura 2.12. Identifique quais elementos estão em série e quais estão em paralelo.

Solução: Existem quatro elementos no circuito, que tem quatro ramos: 10 V, 5 Ω, 6 Ω e 2 A. O circuito tem três nós conforme identificado na Figura 2.13. O resistor de 5 Ω está em série com a fonte de tensão de 10 V, pois a mesma corrente fluiria em ambos. O resistor de 6 Ω está em paralelo com a fonte de corrente de 2 A, já que ambos estão conectados aos mesmos nós 2 e 3.

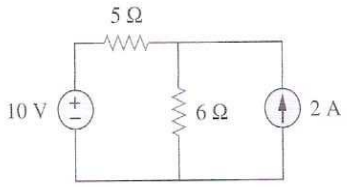


Figura 2.12 Esquema para o Exemplo 2.4.

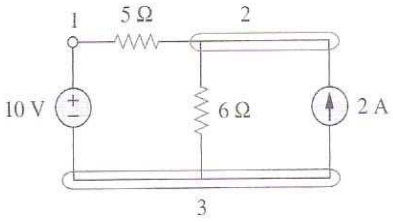


Figura 2.13 Os três nós no circuito da Figura 2.12.

PROBLEMA PRÁTICO 2.4

Quantos ramos e nós o circuito da Figura 2.14 tem? Identifique os elementos que estão em série e em paralelo.

Resposta: Podemos identificar cinco ramos e três nós na Figura 2.15. Os resistores de 1Ω e 2 Ω estão em paralelo, assim como resistor de 4 Ω e a fonte de 10 V.

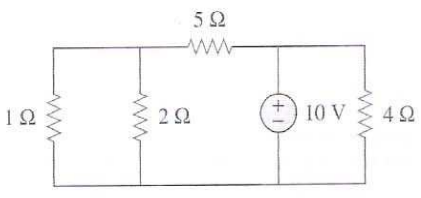


Figura 2.14 Esquema para o Problema prático 2.4.

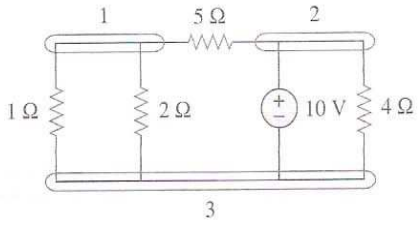


Figura 2.15 Resposta para o Problema prático 2.4.

2.4 Leis de Kirchhoff

A lei de Ohm por si só não é o bastante para analisar os circuitos; entretanto, quando associada com as duas leis de Kirchhoff, elas formam um conjunto de ferramentas poderoso e suficiente para analisar uma série de circuitos elétricos. As leis de Kirchhoff foram introduzidas pela primeira vez em 1847 pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) e são formalmente conhecidas como lei de Kirchhoff para corrente (LKC, ou lei dos nós) e lei de Kirchhoff para tensão (LKT, ou lei das malhas); sendo que a primeira se baseia na lei da conservação da carga, que exige que a soma algébrica das cargas dentro de um sistema não pode mudar.

A lei de Kirchhoff para corrente (LKC) diz que a soma algébrica das correntes que entram em um nó (ou um limite fechado) é zero.

Matematicamente, a LKC implica o seguinte

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \tag{2.13}$$

onde N é o número de ramos conectados ao nó e i_n é a *enésima* corrente que entra (ou sai) do nó. Conforme essa lei, as correntes que entram em um nó poderiam ser consideradas positivas, enquanto as correntes que saem do nó, negativas, e vice-versa.

Para provar a LKC, ou lei dos nós, vamos supor que um conjunto de correntes $i_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, flua para o nó. A soma algébrica das correntes no nó seria

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots \tag{2.14}$$

Integrando ambos os lados da Equação (2.14), obtemos

$$q_T(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + \cdots \tag{2.15}$$

onde $q_k(t) = \int i_k(t)dt$ e $q_T(t) = \int i_T(t)dt$. Porém, a lei da conservação da carga elétrica requer que a soma algébrica das cargas elétricas no nó não se altere; isto é, que o nó não armazene nenhuma carga livre. Portanto, $q_T(t) = 0 \rightarrow i_T(t) = 0$, confirmando a validade da LKC.

Considere a Figura 2.16. Aplicando a LKC, temos

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0 \tag{2.16}$$

uma vez que as correntes i_1, i_3 e i_4 estão entrando no nó, enquanto as correntes i_2 e i_5 estão saindo. Rearranjando os termos, obtemos

$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5 \tag{2.17}$$

A Equação (2.17) é uma forma alternativa da LKC:

A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem desse nó.

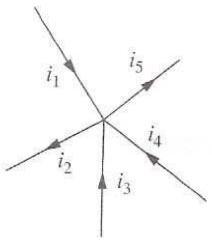


Figura 2.16 Correntes em um nó ilustrando a LKC.

PERFIS HISTÓRICOS

© Pixtal/Age Fotostock RF

Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), físico alemão, enunciou duas leis básicas em 1847 referentes à relação entre correntes e tensões em uma rede elétrica. As leis de Kirchhoff, juntamente com a lei de Ohm, formam a base da teoria dos circuitos.

Filho de um advogado em Konigsberg, Prússia Oriental, com 18 anos Kirchhoff ingressou na Universidade de Konigsberg e, mais tarde, tornou-se professor universitário em Berlim. Seu trabalho em espectroscopia em colaboração com o químico alemão Robert Bunsen o levou à descoberta do césio, em 1860, e do rubídio, em 1861. Credita-se também a Kirchhoff a lei da radiação, por isso Kirchhoff é famoso entre engenheiros, químicos e físicos.

Note que a LKC também se aplica a um limite fechado. Isso pode ser considerado um caso genérico, pois um nó pode ser uma superfície fechada reduzida a um ponto. Em duas dimensões, um limite fechado é o mesmo que um caminho fechado. Conforme ilustrado de forma característica no circuito da Figura 2.17, a corrente total que entra na superfície fechada é igual à corrente total que sai da superfície.

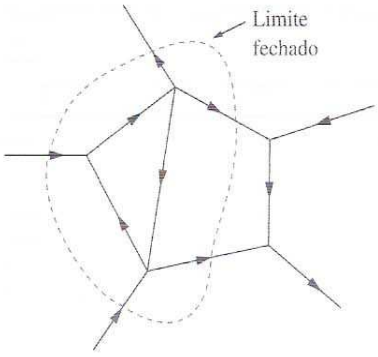


Figura 2.17 Aplicação da LKC a um limite fechado.

Uma aplicação simples da LKC é a associação de fontes de corrente em paralelo. A corrente resultante é a soma algébricas das correntes fornecidas pelas fontes individuais; por exemplo, as fontes de corrente mostradas na Figura 2.18*a* podem ser combinadas, como mostra a Figura 2.18*b*. As fontes de corrente resultantes ou equivalentes podem ser encontradas aplicando a LKC ao nó *a*.

$$I_T + I_2 = I_1 + I_3$$

ou

$$I_T = I_1 - I_2 + I_3 \tag{2.18}$$

Um circuito não pode conter duas correntes diferentes, I_1 e I_2, em série, a menos que $I_1 = I_2$; caso contrário, a LKC será violada.

Diz-se que duas fontes (ou circuitos em geral) são equivalentes se tiverem a mesma relação *i*-*v* em um par de terminais.

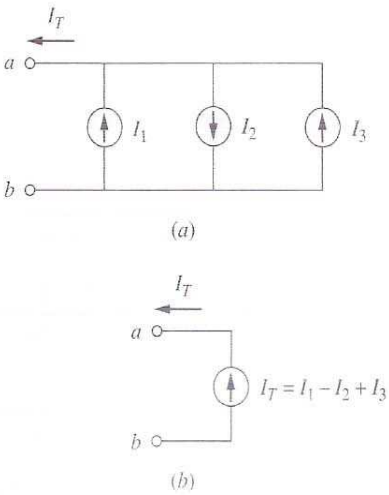


Figura 2.18 Fontes de corrente em paralelo: (*a*) circuito original; (*b*) circuito equivalente.

A segunda lei de Kirchhoff se baseia no princípio da conservação da energia:

A lei de Kirchhoff para tensão (LKT) diz que a soma algébrica de todas as tensões em torno de um caminho fechado (ou laço) é zero.

Expresso matematicamente, a LKT, ou lei das malhas, afirma que

$$\sum_{m=1}^{M} v_m = 0 \tag{2.19}$$

onde M é o número de tensões no laço (ou o número de ramos no laço) e v_m é a m-ésima tensão.

Para ilustrar a LKT, considere o circuito da Figura 2.19. O sinal em cada tensão é a polaridade do terminal encontrado primeiro à medida que percorremos o laço, partindo de qualquer ramo e percorrendo o laço no sentido horário ou

A LKT pode ser aplicada de duas maneiras: percorrendo o laço no sentido horário ou no sentido anti-horário. Independentemente do sentido adotado, a soma algébrica das tensões em torno do laço é zero.

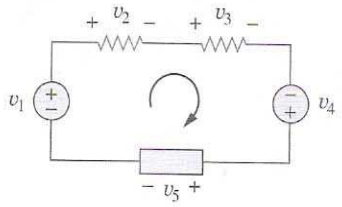


Figura 2.19 Circuito com um único laço ilustrando a LKT.

anti-horário, conforme mostrado; então, as tensões seriam $-v_1$, $+v_2$, $+v_3$, $-v_4$ e $+v_5$, nessa ordem. Por exemplo, ao atingirmos o ramo 3, o terminal positivo é encontrado primeiro; portanto, temos $+v_3$. Para o ramo 4, atingimos primeiro o terminal negativo; logo, temos $-v_4$. Consequentemente, a LKT resulta em

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0 \tag{2.20}$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$v_2 + v_3 + v_5 = v_1 + v_4 \tag{2.21}$$

que pode ser interpretado como

A soma das quedas de tensão é igual à soma das elevações de tensão. **(2.22)**

Essa é uma forma alternativa da LKT. Observe que, se tivéssemos percorrido no sentido anti-horário, o resultado teria sido $+v_1$, $-v_5$, $+v_4$, $-v_3$ e $-v_2$, que é o mesmo que antes, exceto pelo fato de os sinais estarem invertidos, portanto, as Equações (2.20) e (2.21) permanecem as mesmas.

Quando as fontes de tensão estiverem conectadas em série, a LKT pode ser aplicada para obter a tensão total. A tensão associada é a soma algébrica das tensões das fontes individuais. Por exemplo, para as fontes de tensão indicadas na Figura 2.20*a*, a fonte de tensão associada ou equivalente na Figura 2.20*b* é obtida aplicando a LKT.

$$-V_{ab} + V_1 + V_2 - V_3 = 0$$

ou

$$V_{ab} = V_1 + V_2 - V_3 \tag{2.23}$$

Para impedir a violação da LKT, um circuito não pode conter duas tensões diferentes V_1 e V_2 em paralelo a menos que $V_1 = V_2$.

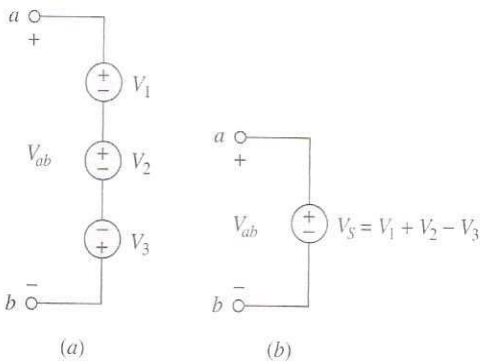


Figura 2.20 Fontes de tensão em série: (*a*) circuito original; (*b*) circuito equivalente.

EXEMPLO 2.5

Para o circuito da Figura 2.21*a*, determine as tensões v_1 e v_2.

Solução: Para encontrar v_1 e v_2, aplicamos a lei de Ohm e a lei de Kirchhoff para tensão. Consideremos que a corrente i flua pelo laço, conforme mostra a Figura 2.21*b*.

Da lei de Ohm,

$$v_1 = 2i, \qquad v_2 = -3i \tag{2.5.1}$$

Aplicando a LKT pelo laço, obtemos

$$-20 + v_1 - v_2 = 0 \tag{2.5.2}$$

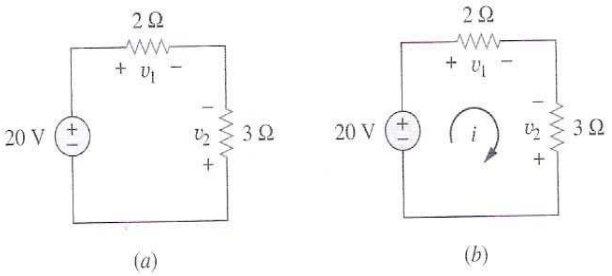


Figura 2.21 Esquema para o Exemplo 2.5.

Substituindo a Equação (2.5.1) na Equação (2.5.2), obtemos

$$-20 + 2i + 3i = 0 \quad \text{ou} \quad 5i = 20 \quad \Rightarrow \quad i = 4\text{ A}$$

Finalmente, substituindo i na Equação (2.5.1), temos

$$v_1 = 8\text{ V}, \qquad v_2 = -12\text{ V}$$

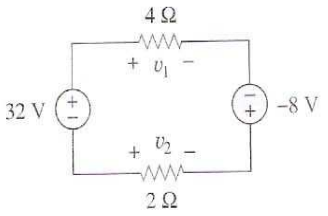


Figura 2.22 Esquema para o Problema prático 2.5.

PROBLEMA PRÁTICO 2.5

Determine v_1 e v_2 no circuito da Figura 2.22.

Resposta: 16 V, –8 V.

EXEMPLO 2.6

Determine v_o e i no circuito mostrado na Figura 2.23*a*.

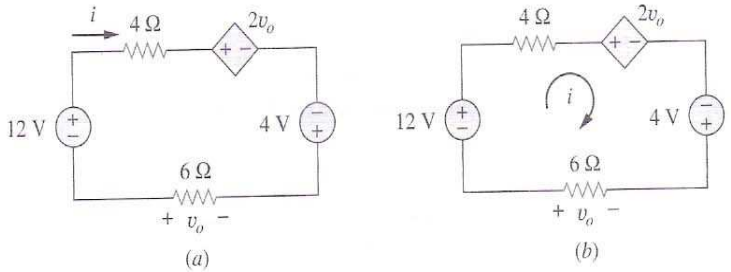


Figura 2.23 Esquema para o Exemplo 2.6.

Solução: Aplicamos a LKT no laço, como mostrado na Figura 2.23*b*. O resultado é

$$-12 + 4i + 2v_o - 4 + 6i = 0 \qquad \textbf{(2.6.1)}$$

Aplicando a lei de Ohm ao resistor de 6 Ω, temos

$$v_o = -6i \qquad \textbf{(2.6.2)}$$

Substituir a Equação (2.6.2) na Equação (2.6.1) obtemos

$$-16 + 10i - 12i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = -8\text{ A}$$

e $v_o = 48$ V.

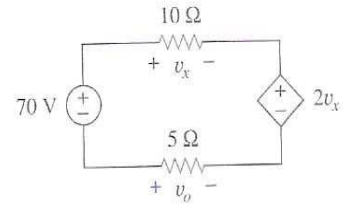


Figura 2.24 Esquema para o Problema prático 2.6.

PROBLEMA PRÁTICO 2.6

Determine v_x e v_o no circuito da Figura 2.24.

Resposta: 20 V, –10 V.

EXEMPLO 2.7

Determine a corrente i_o e a tensão v_o no circuito apresentado na Figura 2.25.

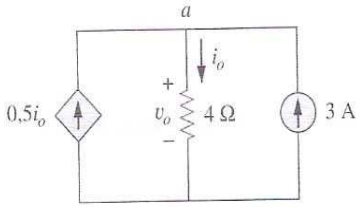


Figura 2.25 Esquema para o Exemplo 2.7.

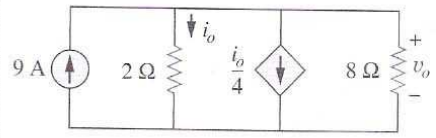


Figura 2.26 Esquema para o Problema prático 2.7.

Solução: Aplicando a LKC ao nó a, obtemos

$$3 + 0{,}5i_o = i_o \quad \Rightarrow \quad i_o = 6 \text{ A}$$

Para o resistor de 4 Ω, a lei de Ohm fornece

$$v_o = 4i_o = 24 \text{ V}$$

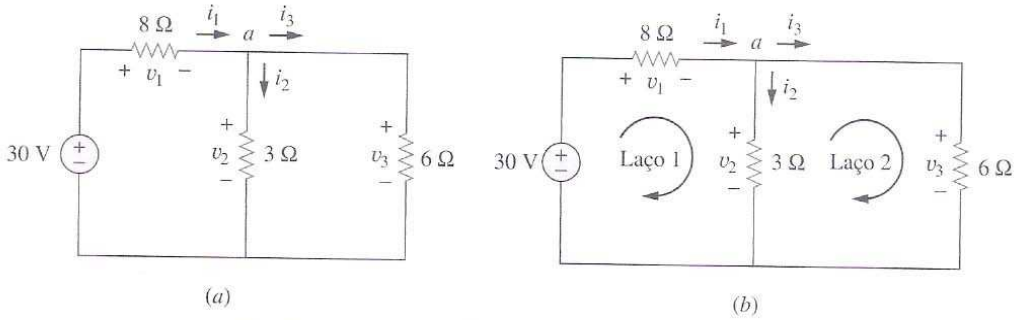
PROBLEMA PRÁTICO 2.7

Determine v_o e i_o no circuito da Figura 2.26.

Resposta: 12 V, 6 A.

EXEMPLO 2.8

Determine as correntes e tensões no circuito mostrado na Figura 2.27*a*.



(*a*) (*b*)

Figura 2.27 Esquema para o Exemplo 2.8.

Solução: Aplicamos a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff. Pela lei de Ohm,

$$v_1 = 8i_1, \qquad v_2 = 3i_2, \qquad v_3 = 6i_3 \tag{2.8.1}$$

Uma vez que a tensão e a corrente de cada resistor estão relacionadas pela lei de Ohm, como mostrado, estamos realmente buscando três coisas: (v_1, v_2, v_3) ou (i_1, i_2, i_3). No nó a, aplicando a LKC temos

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{2.8.2}$$

Aplicando a LKT ao laço 1, como na Figura 2.27*b*,

$$-30 + v_1 + v_2 = 0$$

Expressamos isso em termos de i_1 e i_2, como na Equação (2.8.1), para obter

$$-30 + 8i_1 + 3i_2 = 0$$

ou

$$i_1 = \frac{(30 - 3i_2)}{8} \tag{2.8.3}$$

Aplicando a LKT ao laço 2,

$$-v_2 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_2 \tag{2.8.4}$$

conforme esperado, já que os dois resistores estão em paralelo. Expressamos v_1 e v_2 em termos de i_1 e i_2 como indicado na Equação (2.8.1). A Equação (2.8.4) se torna

$$6i_3 = 3i_2 \quad \Rightarrow \quad i_3 = \frac{i_2}{2} \tag{2.8.5}$$

Substituindo as Equações (2.8.3) e (2.8.5) na Equação (2.8.2), temos

$$\frac{30 - 3i_2}{8} - i_2 - \frac{i_2}{2} = 0$$

ou $i_2 = 2$ A. A partir do valor de i_2, usamos agora as Equações (2.8.1) a (2.8.5) para obter

$$i_1 = 3 \text{ A}, \quad i_3 = 1 \text{ A}, \quad v_1 = 24 \text{ V}, \quad v_2 = 6 \text{ V}, \quad v_3 = 6 \text{ V}$$

PROBLEMA PRÁTICO 2.8

Determine as correntes e tensões no circuito apresentado na Figura 2.28.

Resposta: $v_1 = 6$ V, $v_2 = 4$ V, $v_3 = 10$ V, $i_1 = 3$ A, $i_2 = 500$ mA, $i_3 = 1{,}25$ A.

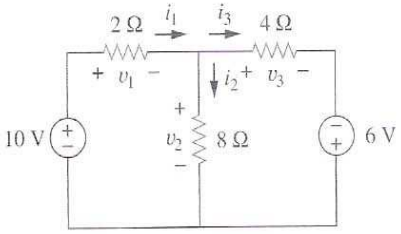


Figura 2.28 Esquema para o Problema prático 2.8.

2.5 Resistores em série e divisão de tensão

A necessidade de se associar resistores em série e em paralelo ocorre de forma tão frequente que merece especial atenção. Esse processo pode ser facilitado associando-se dois resistores por vez. Tendo isso em mente, considere o circuito com um único laço da Figura 2.29 e veja que ambos os resistores estão em série, já que a mesma corrente i flui em ambos. Aplicando a lei de Ohm a cada um dos resistores, obtemos

$$v_1 = iR_1, \qquad v_2 = iR_2 \tag{2.24}$$

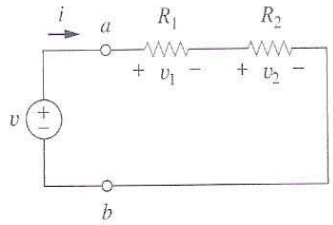


Figura 2.29 Um circuito com um único laço e dois resistores em série.

Se aplicarmos a LKT ao laço (percorrendo-o no sentido horário), temos

$$-v + v_1 + v_2 = 0 \tag{2.25}$$

Combinando as Equações (2.24) e (2.25), obtemos

$$v = v_1 + v_2 = i(R_1 + R_2) \tag{2.26}$$

ou

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \tag{2.27}$$

Observe que a Equação (2.26) pode ser escrita como

$$v = iR_{\text{eq}} \tag{2.28}$$

o que implica o fato dos dois resistores poderem ser substituídos por um resistor equivalente R_{eq}; isto é,

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \tag{2.29}$$

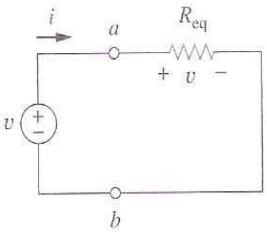


Figura 2.30 Circuito equivalente para o circuito da Figura 2.29.

Portanto, a Figura 2.29 pode ser substituída por um circuito equivalente na Figura 2.30, pois apresenta as mesmas relações tensão-corrente nos terminais a-b. Um circuito equivalente como aquele da Figura 2.30 é útil na simplificação da análise de um circuito. Em geral,

A **resistência equivalente** de qualquer número de resistores ligados em série é a soma das resistências individuais.

Para N resistores em série então,

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n \tag{2.30}$$

Resistores em série se comportam como um único resistor cuja resistência é igual à soma das resistências dos resistores individuais.

Para determinar a tensão em cada resistor na Figura 2.29, substituímos a Equação (2.26) na Equação (2.24) e obtemos

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \qquad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v \tag{2.31}$$

Note que a tensão da fonte v é dividida entre os resistores na proporção direta de suas resistências; quanto maior for a resistência, maior a queda de tensão. Isso é chamado *princípio da divisão de tensão* e o circuito na Figura 2.29 é denominado *divisor de tensão*. Em geral, se um divisor de tensão tiver N resistores ($R_1, R_2, ..., R_N$) em série com a tensão de entrada v, o n-ésimo resistor (R_n) terá uma queda de tensão de

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \tag{2.32}$$

2.6 Resistores em paralelo e divisão de corrente

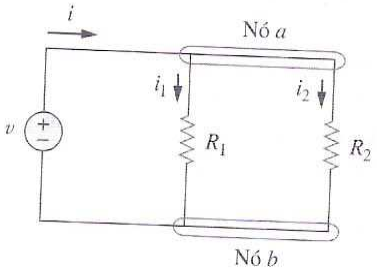


Figura 2.31 Dois resistores em paralelo.

Consideremos o circuito da Figura 2.31, em que dois resistores estão conectados em paralelo e, portanto, possuem a mesma queda de tensão entre eles. Da lei de Ohm,

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2$$

ou

$$i_1 = \frac{v}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{v}{R_2} \tag{2.33}$$

Aplicando a LKC em um nó a obtemos a corrente total i, conforme indicado a seguir

$$i = i_1 + i_2 \tag{2.34}$$

Substituindo a Equação (2.33) na Equação (2.34), obtemos

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{v}{R_{eq}} \tag{2.35}$$

onde R_{eq} é a resistência equivalente dos resistores em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2.36}$$

ou

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

ou

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.37}$$

Portanto,

A **resistência equivalente** de dois resistores em paralelo é igual ao produto de suas resistências dividido pela sua soma.

Deve-se enfatizar que isso se aplica apenas a dois resistores em paralelo. Da Equação (2.37), se $R_1 = R_2$, então $R_{eq} = R_1/2$.

Podemos estender o resultado da Equação (2.36) ao caso geral de um circuito com N resistores em paralelo. A resistência equivalente é

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \tag{2.38}$$

Observe que R_{eq} é sempre menor que a resistência do menor resistor na associação em paralelo. Se $R_1 = R_2 = ... = R_N = R$, então

$$R_{eq} = \frac{R}{N} \tag{2.39}$$

Por exemplo, se quatro resistores de 100 Ω estiverem conectados em paralelo, sua resistência equivalente é 25 Ω.

Normalmente é mais conveniente usar condutância em vez de resistência ao lidar com resistores em paralelo. A partir da Equação (2.38), a condutância equivalente para N resistores em paralelo é

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N \tag{2.40}$$

onde $G_{eq} = 1/R_{eq}$, $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, ..., $G_N = 1/R_N$. A Equação (2.40) afirma que:

As condutâncias em paralelo se comportam como uma única condutância cujo valor é igual à soma das condutâncias individuais.

A **condutância equivalente** de resistores conectados em paralelo é a soma de suas condutâncias individuais.

Isso significa que podemos substituir o circuito da Figura 2.31 por aquele da Figura 2.32. Perceba a similaridade entre as Equações (2.30) e (2.40). A condutância equivalente de resistores em paralelo é obtida da mesma forma que a resistência equivalente dos resistores em série; igualmente, a condutância equivalente dos resistores em série é obtida exatamente da mesma forma que a resistência equivalente dos resistores em paralelo. Portanto, a condutância equivalente G_{eq} de N resistores em série (como aqueles ilustrados na Figura 2.29) é

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \cdots + \frac{1}{G_N} \tag{2.41}$$

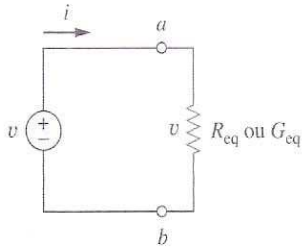
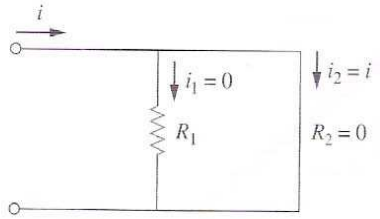


Figura 2.32 Circuito equivalente ao da Figura 2.31.

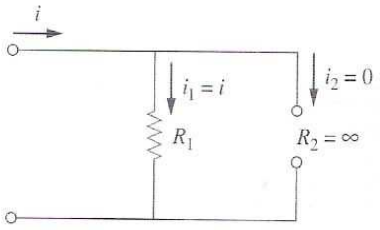
Dada a corrente total i que entra pelo nó a (Figura 2.31), como obtemos a corrente i_1 e i_2? Sabemos que o resistor equivalente tem a mesma tensão, ou

$$v = iR_{eq} = \frac{iR_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.42}$$

Combinando as Equações (2.33) e (2.42), temos



(*a*)



(*b*)

Figura 2.33 (*a*) Curto-circuito; (*b*) Circuito aberto.

$$i_1 = \frac{R_2\, i}{R_1 + R_2}, \qquad i_2 = \frac{R_1\, i}{R_1 + R_2} \tag{2.43}$$

que mostra que a corrente total i é compartilhada pelos resistores na proporção inversa de suas resistências. Isso é conhecido como *princípio da divisão de corrente* e o circuito da Figura 2.31 é conhecido como *divisor de corrente*. Perceba que a maior corrente flui pela menor resistência.

Como caso extremo, suponha que um dos resistores da Figura 2.31 seja zero, e que $R_2 = 0$; isto é, R_2 é um curto-circuito, conforme mostrado na Figura 2.33*a*. A partir da Equação (2.43), $R_2 = 0$ resulta em $i_1 = 0$, $i_2 = i$. Isso significa que a corrente i desvia de R_1 e flui inteiramente pelo curto-circuito $R_2 = 0$, o caminho de menor resistência. Assim, quando temos um curto-circuito em um circuito, como na Figura 2.33*a*, devemos ter duas coisas em mente:

1. A resistência equivalente $R_{eq} = 0$. [Observe o que acontece quando $R_2 = 0$ na Equação (2.37).]
2. Toda a corrente flui pelo curto-circuito.

Como outro caso extremo, suponhamos que $R_2 = \infty$, isto é, R_2 é um circuito aberto, conforme mostrado na Figura 2.33*b*. A corrente ainda flui pelo caminho de menor resistência, R_1. Tomando o limite da Equação (2.37) quando $R_2 = \infty$, obtemos, nesse caso, $R_{eq} = R_1$.

Se dividirmos tanto o numerador como o denominador por R_1R_2, a Equação (2.43) fica

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \tag{2.44a}$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \tag{2.44b}$$

Geralmente, se um divisor de corrente tiver N condutores (G_1, G_2, ..., G_N) em paralelo com a fonte de corrente i, o n-ésimo condutor (G_n) terá a corrente

$$i_n = \frac{G_n}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N} i \tag{2.45}$$

Muitas vezes é conveniente e possível associar resistores em série e em paralelo e reduzir uma rede resistiva a uma única *resistência equivalente* R_{eq}. Tal resistência equivalente é a resistência entre os terminais designados da rede e tem de apresentar a mesma curva característica i-v que a rede original nos terminais.

EXEMPLO 2.9

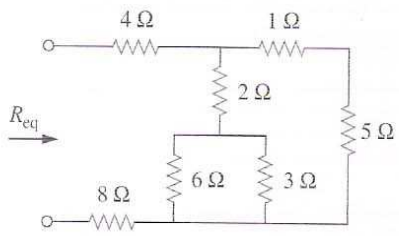


Figura 2.34 Esquema para o Exemplo 2.9.

Determine a R_{eq} para o circuito mostrado na Figura 2.34.

Solução: Para obter R_{eq}, associamos resistores em série e em paralelo. Os resistores de 6 Ω e 3 Ω estão em paralelo e, portanto, sua resistência equivalente é

$$6\,\Omega \parallel 3\Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\,\Omega$$

(O símbolo $\parallel$ é usado para indicar uma associação em paralelo.) Da mesma forma, os resistores de 1 Ω e de 5 Ω estão em série; logo, sua resistência equivalente é

$$1\,\Omega + 5\,\Omega = 6\,\Omega$$

Portanto, o circuito da Figura 2.34 é reduzido àquele da Figura 2.35*a*, na qual os dois resistores de 2 Ω estão em série e, portanto, sua resistência equivalente é

$$2\ \Omega + 2\ \Omega = 4\ \Omega$$

Esse resistor de 4 Ω agora está em paralelo com o resistor de 6 Ω da Figura 2.35*a*; sua resistência equivalente é

$$4\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2{,}4\ \Omega$$

O circuito da Figura 2.35*a* agora é substituído pela Figura 2.35*b*, na qual os três resistores estão em série. Portanto, a resistência equivalente para o circuito é

$$R_{eq} = 4\ \Omega + 2{,}4\ \Omega + 8\ \Omega = 14{,}4\ \Omega$$

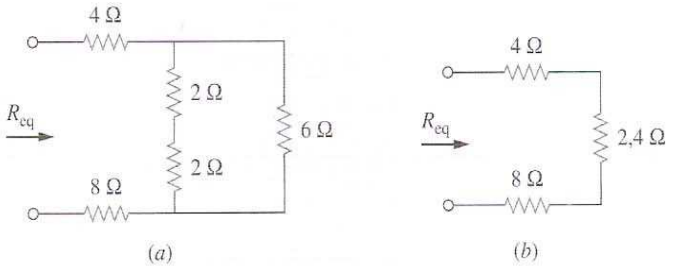


Figura 2.35 Circuitos equivalentes para o Exemplo 2.9.

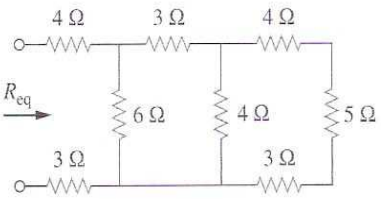


Figura 2.36 Esquema para o Problema prático 2.9.

PROBLEMA PRÁTICO 2.9

Associando os resistores da Figura 2.36, determine R_{eq}.

Resposta: 10 Ω.

EXEMPLO 2.10

Calcule a resistência equivalente R_{ab} no circuito da Figura 2.37.

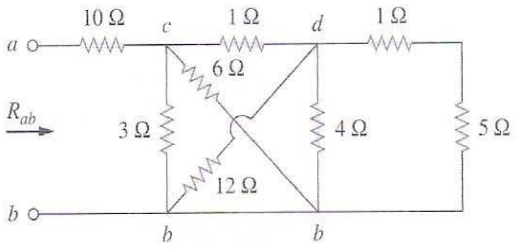


Figura 2.37 Esquema para o Exemplo 2.10.

Solução: Os resistores de 3 Ω e 6 Ω estão em paralelo, pois estão conectados aos mesmos nós *c* e *b*. A resistência da associação é

$$3\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\ \Omega \qquad \textbf{(2.10.1)}$$

De forma semelhante, os resistores de 12 Ω e 4 Ω estão em paralelo já que estão conectados aos mesmos dois nós, *d* e *b*. Logo,

$$12\ \Omega \parallel 4\ \Omega = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\ \Omega \qquad \textbf{(2.10.2)}$$

Os resistores de 1 Ω e 5 Ω também estão em série; portanto, sua resistência equivalente é

$$1\ \Omega + 5\ \Omega = 6\ \Omega \qquad \textbf{(2.10.3)}$$

Com essas três associações, podemos substituir o circuito da Figura 2.37 por aquele da Figura 2.38*a*, na qual 3 Ω em paralelo com 6 Ω resulta em 2 Ω, conforme calculado na Equação (2.10.1). Essa resistência equivalente de 2 Ω agora está em série com

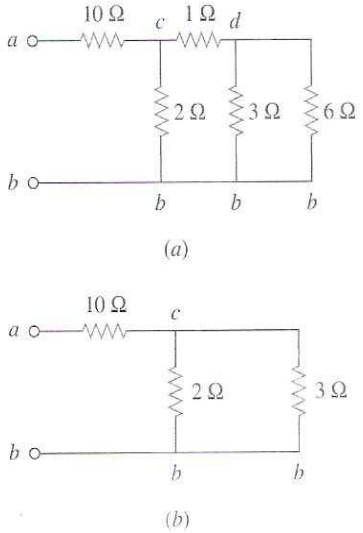


Figura 2.38 Circuitos equivalentes para o Exemplo 2.10.

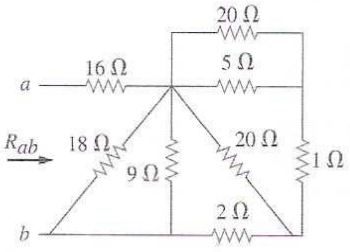


Figura 2.39 Esquema para o Problema prático 2.10.

a resistência de 1 Ω para dar uma resistência associada de 1 Ω + 2 Ω = 3 Ω. Portanto, substituímos o circuito da Figura 2.38*a* pela Figura 2.38*b* em que associamos os resistores de 2 Ω e 3 Ω em paralelo para obter

$$2\ \Omega \| 3\ \Omega = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 1{,}2\ \Omega$$

Esse resistor de 1,2 Ω está em série com o resistor de 10 Ω, de modo que

$$R_{ab} = 10 + 1{,}2 = 11{,}2\ \Omega$$

PROBLEMA PRÁTICO 2.10

Determine R_{ab} para o circuito da Figura 2.39.

Resposta: 19 Ω.

EXEMPLO 2.11

Determine a condutância equivalente G_{eq} para o circuito da Figura 2.40*a*.

Solução: Os resistores de 8 S e 12 S estão em paralelo e, portanto, sua condutância é

$$8\ \text{S} + 12\ \text{S} = 20\ \text{S}$$

Esse resistor de 20 S agora está em série com o de 5 S, como mostrado na Figura 2.40*b*, de forma que a condutância associada seja

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\ \text{S}$$

E está em paralelo com o resistor de 6 S. Portanto,

$$G_{eq} = 6 + 4 = 10\ \text{S}$$

Devemos notar que o circuito da Figura 2.40*a* é o mesmo que o da Figura 2.40*c*. Embora os resistores da *a* sejam expressos em siemens, aqueles da *c* são expressos em ohms. Para mostrar que os circuitos são os mesmos, encontramos o R_{eq} para o circuito da Figura 2.40*c*.

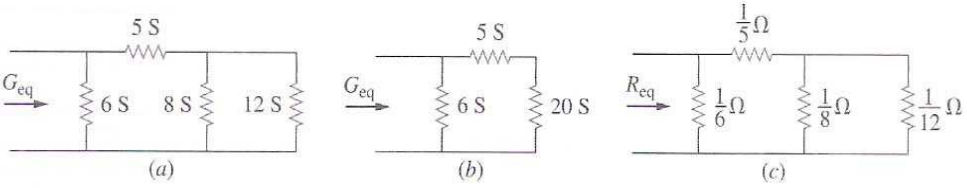


Figura 2.40 Esquema para o Exemplo 2.11: (*a*) circuito original; (*b*) seu circuito equivalente; (*c*) o mesmo circuito de (*a*), porém com os resistores expressos em ohms.

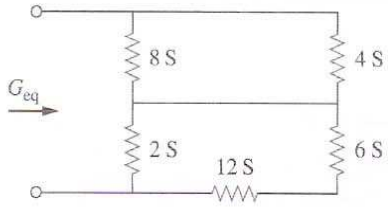


Figura 2.41 Esquema para o Problema prático 2.11.

$$R_{eq} = \frac{1}{6} \left\| \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right\| \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{6} \left\| \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{6} \right\| \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{10}\ \Omega$$

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = 10\ \text{S}$$

Este é o mesmo valor obtido anteriormente.

PROBLEMA PRÁTICO 2.11

Calcule G_{eq} no circuito da Figura 2.41.

Resposta: 4 S.

EXEMPLO 2.12

Determine i_o e v_o no circuito mostrado na Figura 2.42*a*. Calcule a potência dissipada no resistor de 3 Ω.

Solução: Os resistores de 6 Ω e 3 Ω estão em paralelo e, portanto, sua resistência associada é

$$6\ \Omega \| 3\ \Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\ \Omega$$

Portanto, nosso circuito se reduz àquele mostrado na Figura 2.42*b*. Note que v_o não é afetado pela associação dos resistores, porque os resistores estão em paralelo e, consequentemente, apresentam a mesma tensão v_o. Da Figura 2.42*b* podemos obter v_o, de duas formas. Uma delas é aplicar a lei de Ohm para obter

$$i = \frac{12}{4+2} = 2\text{ A}$$

e, então, $v_o = 2i = 2 \times 2 = 4$ V. Outra forma seria aplicar a divisão de tensão, já que os 12 V na Figura 2.42*b* são divididos entre os resistores de 4 Ω e 2 Ω. Portanto,

$$v_o = \frac{2}{2+4}(12\text{ V}) = 4\text{ V}$$

De modo similar, i_o pode ser associada de duas formas. Nossa abordagem é aplicar a lei de Ohm ao resistor de 3 Ω na Figura 2.42*a* agora que conhecemos v_o; logo,

$$v_o = 3i_o = 4 \quad \Rightarrow \quad i_o = \frac{4}{3}\text{A}$$

Outra forma seria aplicar a divisão de corrente ao circuito da Figura 2.42*a* agora que conhecemos i, escrevendo

$$i_o = \frac{6}{6+3}i = \frac{2}{3}(2\text{ A}) = \frac{4}{3}\text{A}$$

A potência dissipada no resistor de 3 Ω é

$$p_o = v_o i_o = 4\left(\frac{4}{3}\right) = 5{,}333\text{ W}$$

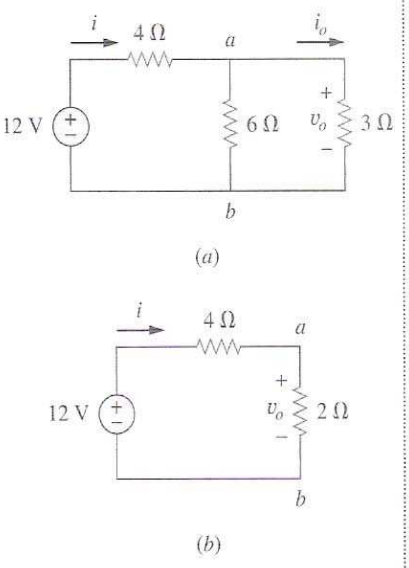


Figura 2.42 Esquema para o Exemplo 2.12: (*a*) circuito original; (*b*) seu circuito equivalente.

PROBLEMA PRÁTICO 2.12

Determine v_1 e v_2 no circuito mostrado na Figura 2.43. Calcule também i_1 e i_2 e a potência dissipada nos resistores de 12 Ω e 40 Ω.

Resposta: $v_1 = 10$ V, $i_1 = 833{,}3$ mA, $p_1 = 8{,}333$ W, $v_2 = 20$ V, $i_2 = 500$ mA, $p_2 = 10$W.

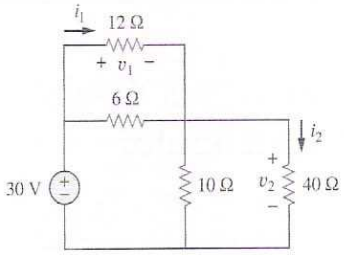


Figura 2.43 Esquema para o Problema prático 2.12.

EXEMPLO 2.13

Para o circuito mostrado na Figura 2.44*a*, determine: (*a*) tensão v_o; (*b*) potência fornecida pela fonte de corrente; (*c*) potência absorvida por cada resistor.

Solução: (a) Os resistores de 6 kΩ e 12 kΩ estão em série de modo que seu valor associado é igual a 6 + 12 = 18 kΩ. Portanto, o circuito da Figura 2.44*a* se reduz àquele mostrado na *b*. Agora, aplicamos a técnica de divisão de corrente para encontrar i_1 e i_2.

$$i_1 = \frac{18.000}{9.000 + 18.000}(30\text{ mA}) = 20\text{ mA}$$

$$i_2 = \frac{9.000}{9.000 + 18.000}(30\text{ mA}) = 10\text{ mA}$$

Note que a tensão entre os resistores de 9 kΩ e 18 kΩ é a mesma e $v_o = 9.000\ i_1 = 18.000 i_2 = 180$ V, conforme esperado.

(b) A potência fornecida pela fonte é

$$p_o = v_o i_o = 180(30)\text{ mW} = 5{,}4\text{ W}$$

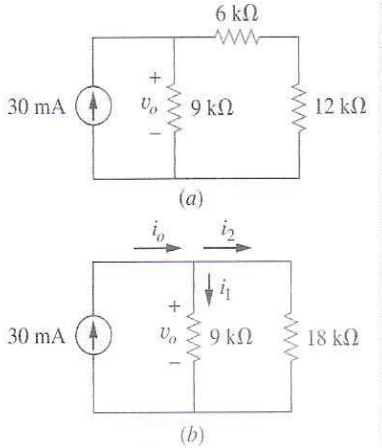


Figura 2.44 Esquema para o Exemplo 2.13: (*a*) circuito original; (*b*) seu circuito equivalente.

(c) A potência absorvida pelo resistor de 12 kΩ é

$$p = iv = i_2(i_2R) = i_2^2R = (10 \times 10^{-3})^2\,(12.000) = 1{,}2\ \text{W}$$

A potência absorvida pelo resistor de 6 kΩ é

$$p = i_2^2\,R = (10 \times 10^{-3})^2\,(6.000) = 0{,}6\ \text{W}$$

A potência absorvida pelo resistor de 9 kΩ é

$$p = \frac{v_o^2}{R} = \frac{(180)^2}{9.000} = 3{,}6\ \text{W}$$

ou

$$p = v_o i_1 = 180(20)\ \text{mW} = 3{,}6\ \text{W}$$

Observe que a potência fornecida (5,4 W) é igual à potência absorvida (1,2 + 0,6 + 3,6 = 5,4 W). Essa é uma forma de conferir os resultados.

PROBLEMA PRÁTICO 2.13

Para o circuito mostrado na Figura 2.45, determine: (a) v_1 e v_2; (b) potência dissipada nos resistores de 3 kΩ e 20 kΩ; e (*c*) potência fornecida pela fonte de corrente.

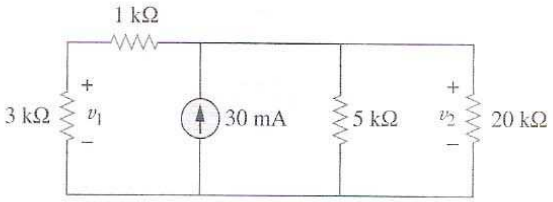


Figura 2.45 Esquema para o Problema prático 2.13.

Resposta: (a) 45 V, 60 V, (b) 675 mW, 180 mW, (c) 1,8 W.

2.7 †Transformações Y-delta (estrela-triângulo)

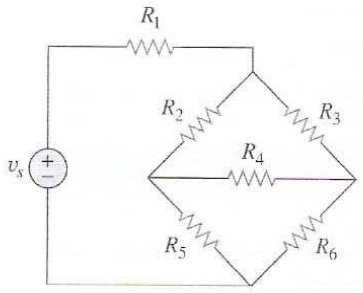


Figura 2.46 Circuito em ponte.

Muitas vezes surgem situações na análise de circuitos em que os resistores não estão nem em paralelo nem em série. Consideremos, por exemplo, o circuito em ponte da Figura 2.46. Como associamos os resistores R_1 a R_6 quando eles não estão nem em série nem em paralelo? Muitos circuitos do tipo mostrado nessa figura podem ser simplificados usando-se redes equivalentes de três terminais. Estas correspondem à rede ípsilon (Y) ou tê (T), mostrada na Figura 2.47, e à rede delta (Δ) ou pi (Π), ilustrada na Figura 2.48. Essas redes ocorrem por si só ou como parte de uma rede maior e são usadas em redes trifásicas, filtros elétricos e circuitos adaptadores. Nosso principal interesse aqui é como identificá-las quando forem parte de uma rede e como aplicar a transformação Y-delta (ou estrela-triângulo) na análise da rede.

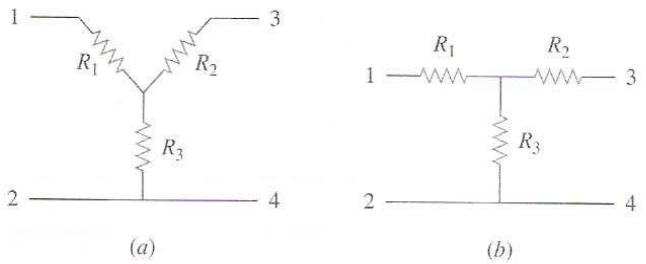


Figura 2.47 Duas formas da mesma rede: (*a*) Y; (*b*) T.

2.7.1 Conversão delta-Y (triângulo-estrela)

Suponha que seja mais conveniente trabalhar com uma rede Y em um ponto em que o circuito contém uma configuração delta. Sobrepomos uma rede Y à rede delta existente e encontramos as resistências equivalentes na rede Y, e, para obtê-las, comparamos as duas redes e nos certificamos de que a resistência entre cada par de nós na rede Δ (ou Π) é a mesma que a resistência entre o mesmo par de nós na rede Y (ou T). Para os terminais 1 e 2 das Figuras 2.47 e 2.48, por exemplo.

$$R_{12}(\mathrm{Y}) = R_1 + R_3$$
$$R_{12}(\Delta) = R_b \parallel (R_a + R_c) \tag{2.46}$$

Fazendo $R_{12}(\mathrm{Y}) = R_{12}(\Delta)$, obtemos

$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2.47a}$$

De forma similar,

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2.47b}$$

$$R_{34} = R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2.47c}$$

Subtraindo a Equação (2.47*c*) da Equação (2.47*a*), obtemos

$$R_1 - R_2 = \frac{R_c(R_b - R_a)}{R_a + R_b + R_c} \tag{2.48}$$

Somar as Equações (2.47*b*) e (2.48), resulta em

$$\boxed{R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}} \tag{2.49}$$

e subtrair a Equação (2.48) da Equação (2.47*b*) nos leva a

$$\boxed{R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}} \tag{2.50}$$

Subtraindo a Equação (2.49) da Equação (2.47*a*), obtemos

$$\boxed{R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}} \tag{2.51}$$

Não precisamos memorizar as Equações (2.49) a (2.51). Para transformar uma rede Δ em uma rede Y, criamos um nó *n* extra, conforme exposto na Figura 2.49 e seguimos a regra da conversão:

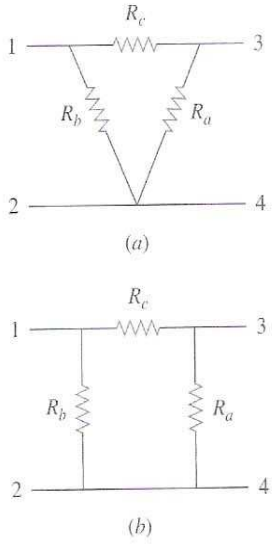


Figura 2.48 Duas formas da mesma rede: (*a*) Δ; (*b*) Π.

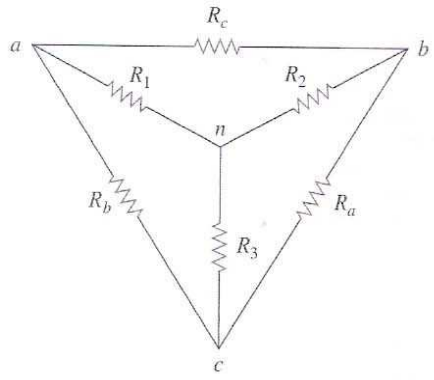


FIGURA 2.49 Superposição das redes Y e Δ como uma ferramenta na transformação de uma em outra.

Cada resistor na rede Y é o produto dos resistores nos dois ramos adjacentes Δ, dividido pela soma dos três resistores Δ.

Pode-se seguir essa regra e obter das Equações (2.49) a (2.51) da Figura 2.49.

2.7.2 Conversão Y-delta

Para obter as fórmulas de conversão para transformar uma rede Y em uma rede delta equivalente, observamos das Equações (2.49) a (2.51) que

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = \frac{R_aR_bR_c(R_a + R_b + R_c)}{(R_a + R_b + R_c)^2} = \frac{R_aR_bR_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{2.52}$$

Dividir a Equação (2.52) pelas Equações (2.49) a (2.51) nos leva às seguintes equações:

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \tag{2.53}$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \tag{2.54}$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \tag{2.55}$$

Das Equações (2.53) a (2.55) e da Figura 2.49, a regra da conversão de Y para Δ é a seguinte:

Cada resistor na rede Δ é a soma de todos os produtos possíveis de Y resistores extraídos dois a dois, dividido pelo resistor Y oposto.

As redes Y e Δ são ditas *equilibradas* quando

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y, \qquad R_a = R_b = R_c = R_\Delta \tag{2.56}$$

Sob tais condições, as fórmulas de conversão ficam

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \text{ou} \quad R_\Delta = 3R_Y \tag{2.57}$$

Pode-se perguntar por que R_Y é menor que R_Δ. Bem, notamos que a conexão em Y é como uma conexão "em série", enquanto a conexão em Δ é como se fosse uma conexão "em paralelo".

Note que, ao fazer a transformação, não retiramos nem inserimos nada de novo no circuito, porque substituímos padrões de rede de três terminais diferentes, porém matematicamente equivalentes para criar um circuito no qual os resistores estão em série ou em paralelo, o que possibilita que calculemos a R_{eq}, caso necessário.

EXEMPLO 2.14

Converta a rede Δ da Figura 2.50*a* em uma rede Y equivalente.

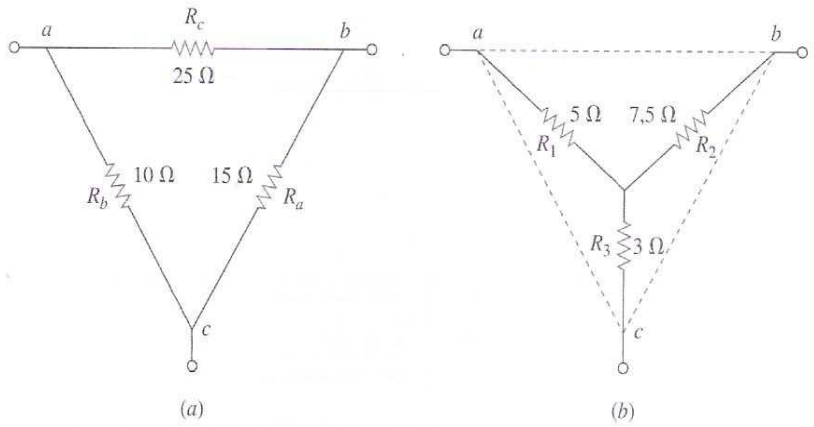


Figura 2.50 Esquema para o Exemplo 2.14: (*a*) rede Δ original; (*b*) rede Y equivalente.

Solução: Usando das Equações (2.49) a (2.51), obtemos

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{10 \times 25}{15 + 10 + 25} = \frac{250}{50} = 5\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 15}{50} = 7{,}5\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 10}{50} = 3\ \Omega$$

A rede Y equivalente é mostrada na Figura 2.50*b*.

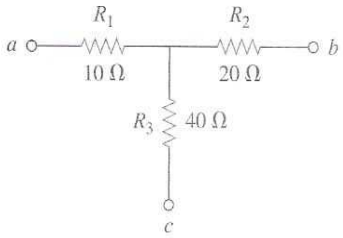


Figura 2.51 Esquema para o Problema prático 2.14.

PROBLEMA PRÁTICO 2.14

Transforme a rede Y da Figura 2.51 em uma rede delta.

Resposta: $R_a = 140\ \Omega$, $R_b = 70\ \Omega$, $R_c = 35\ \Omega$.

EXEMPLO 2.15

Obtenha a resistência equivalente R_{ab} para o circuito da Figura 2.52 e a use para encontrar a corrente *i*.

Solução:

1. ***Definição.*** O problema está claramente definido. Note que essa parte normalmente precisará de um investimento de tempo muito maior.
2. ***Apresentação.*** Fica claro, ao eliminarmos a fonte de tensão, que, no final das contas, temos um circuito puramente resistivo. Uma vez que ele é composto por deltas e ípsilons (triângulos e estrelas), há um processo mais complexo de associação de elementos. Podemos usar transformações estrela-triângulo como uma forma de abordagem na tentativa de encontrar uma solução. É útil localizar as estrelas (existem duas delas nesse caso, uma em *n* e outra em *c*) e os triângulos (existem três: *can*, *abn*, *cnb*).
3. ***Alternativa.*** Existem diferentes métodos que podem ser usados para solucionar esse problema. Já que o foco da Seção 2.7 é a transformação estrela-triângulo, esta deve ser a técnica a ser empregada. Outra abordagem seria encontrar a resistência equivalente injetando um amperímetro no circuito e encontrando a tensão entre *a* e *b*, que veremos no Capítulo 4.

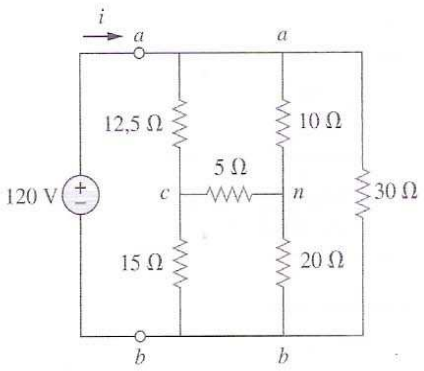


Figura 2.52 Esquema para o Exemplo 2.15.

A abordagem que podemos aplicar aqui para nos certificarmos seria usar uma transformação estrela-triângulo como primeira solução para o problema. Posteriormente, podemos verificar a solução iniciando com uma transformação triângulo-estrela.

4. ***Tentativa.*** Nesse circuito, existem duas redes Y e três redes Δ. Transformar apenas uma delas já o simplificará. Se convertermos a rede Y formada pelos resistores de 5 Ω, 10 Ω e 20 Ω, podemos selecionar

$$R_1 = 10\ \Omega, \qquad R_2 = 20\ \Omega, \qquad R_3 = 5\ \Omega$$

Portanto, das Equações (2.53) a (2.55), temos

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} = \frac{10 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 10}{10}$$

$$= \frac{350}{10} = 35\ \Omega$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} = \frac{350}{20} = 17{,}5\ \Omega$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} = \frac{350}{5} = 70\ \Omega$$

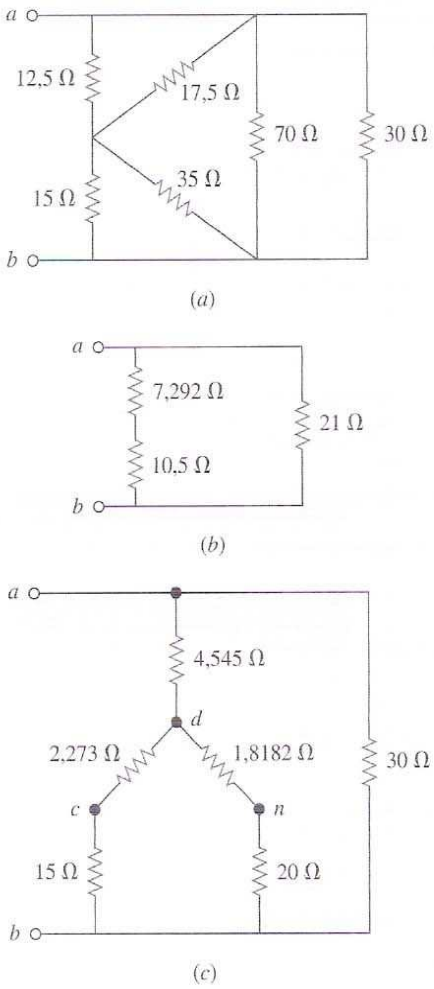


Figura 2.53 Circuitos equivalentes para a Figura 2.52, com a fonte de tensão eliminada.

Com o Y convertido em Δ, o circuito equivalente (com a fonte de tensão eliminada por enquanto) é mostrado na Figura 2.53*a*. Associando os três pares de resistores em paralelo, obtemos

$$70 \parallel 30 = \frac{70 \times 30}{70 + 30} = 21\ \Omega$$

$$12{,}5 \parallel 17{,}5 = \frac{12{,}5 \times 17{,}5}{12{,}5 + 17{,}5} = 7{,}292\ \Omega$$

$$15 \parallel 35 = \frac{15 \times 35}{15 + 35} = 10{,}5\ \Omega$$

de modo que o circuito equivalente é mostrado na Figura 2.53*b*. Assim, determinamos

$$R_{ab} = (7{,}292 + 10{,}5) \parallel 21 = \frac{17{,}792 \times 21}{17{,}792 + 21} = \mathbf{9{,}632\ \Omega}$$

Então

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9{,}632} = \mathbf{12{,}458\ A}$$

Observe que fomos bem-sucedidos na resolução do problema. Agora, temos de avaliar a solução.

5. ***Avaliação.*** Desta vez, precisamos determinar se a resposta está correta e em seguida avaliar a solução final.

É relativamente fácil verificar a resposta; isso pode ser feito resolvendo o problema partindo de uma transformação triângulo-estrela. Transformemos o triângulo, *can*, em uma estrela.

Seja $R_c = 10\ \Omega$, $R_a = 5\ \Omega$ e $R_n = 12{,}5\ \Omega$. Isso conduzirá ao seguinte (façamos que d represente o centro da estrela):

$$R_{ad} = \frac{R_cR_n}{R_a + R_c + R_n} = \frac{10 \times 12{,}5}{5 + 10 + 12{,}5} = 4{,}545\ \Omega$$

$$R_{cd} = \frac{R_aR_n}{27{,}5} = \frac{5 \times 12{,}5}{27{,}5} = 2{,}273\ \Omega$$

$$R_{nd} = \frac{R_aR_c}{27{,}5} = \frac{5 \times 10}{27{,}5} = 1{,}8182\ \Omega$$

Isso agora conduz ao circuito mostrado na Figura 2.53*c*. Examinando a resistência entre *d* e *b*, temos duas associações série em paralelo, o que resulta em

$$R_{db} = \frac{(2{,}273 + 15)(1{,}8182 + 20)}{2{,}273 + 15 + 1{,}8182 + 20} = \frac{376{,}9}{39{,}09} = 9{,}642\ \Omega$$

E está em série com o resistor de 4,545 Ω, ambos os quais estão em paralelo com o resistor de 30 Ω. Isso resulta, em seguida, na resistência equivalente do circuito.

$$R_{ab} = \frac{(9{,}642 + 4{,}545)30}{9{,}642 + 4{,}545 + 30} = \frac{425{,}6}{44{,}19} = \mathbf{9{,}631\ \Omega}$$

Isso agora nos leva a

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9{,}631} = \mathbf{12{,}46\ A}$$

Note que usar duas variações na transformação estrela-triângulo conduz aos mesmos resultados. Isso representa excelente comprovação.

6. ***Satisfatório?*** Uma vez que encontramos a resposta desejada determinando primeiro a resistência equivalente do circuito e as verificações das respostas, então temos claramente uma solução satisfatória. Isso representa o que pode ser apresentado à pessoa que está designando o problema.

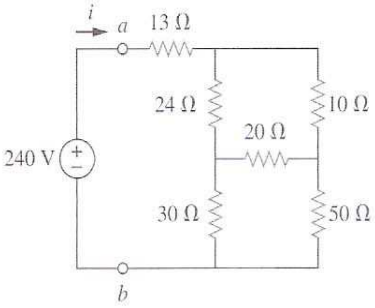


Figura 2.54 Esquema para o Problema prático 2.15.

PROBLEMA PRÁTICO 2.15

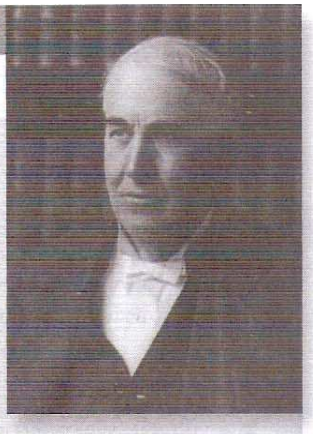
Para o circuito em ponte da Figura 2.54, determine R_{ab} e i.

Resposta: 40 Ω, 6 A.

2.8 †Aplicações

Frequentemente, os resistores são usados para modelar dispositivos que convertem energia elétrica em calor ou em outras formas de energia. Entre dispositivos desse tipo, temos fio condutor, lâmpadas, aquecedores, fogão e forno elétricos, bem como alto-faltantes. Nesta seção, consideraremos dois problemas práticos que aplicam os conceitos desenvolvidos neste capítulo: sistemas de iluminação elétrica e o projeto de medidores CC.

PERFIS HISTÓRICOS



Biblioteca do Congresso.

Thomas Alva Edison (1847-1931) talvez tenha sido o maior inventor norte-americano. Ele patenteou 1.093 invenções, entre as quais a lâmpada incandescente, o fonógrafo e o primeiro filme de cinema comercial, que foram marcantes.

Nascido em Milan, Ohio, o caçula de sete crianças, Edison teve apenas três meses de educação formal, pois detestava ir à escola. Foi educado em casa por sua mãe e rapidamente começou a ler. Em 1868, Edison leu um dos livros de Faraday e encontrou sua vocação. Mudou-se para Menlo Park, Nova Jersey, em 1876, onde dirigiu um laboratório de pesquisas com muitos funcionários. A maioria de suas invenções originou desse laboratório, que serviu como modelo para modernas organizações de pesquisa. Por causa de seus interesses diversos e ao número avassalador de suas invenções e patentes, Edison começou a fundar companhias manufatureiras para produzir os seus inventos. Com isso, projetou a primeira central elétrica a fornecer luz elétrica. Sua formação formal em engenharia elétrica iniciou-se em meados de 1880, com Edison assumindo papel de modelo e líder.

2.8.1 Sistemas de iluminação

Até o momento, consideramos que os fios de conexão são condutores perfeitos (ou seja, condutores de resistência zero). Entretanto, nos sistemas físicos reais a resistência do fio conector pode ser consideravelmente grande e a modelagem do sistema deve incluir essa resistência.

Os sistemas de iluminação como os residenciais ou de uma árvore de Natal normalmente são formados por N lâmpadas conectadas em série ou em paralelo, como mostra a Figura 2.55. Cada lâmpada é modelada como um resistor, e, supondo que todas as lâmpadas sejam idênticas e V_o seja a tensão de rede, a tensão entre cada lâmpada é V_o para a conexão em paralelo e V_o/N para a conexão em série. A conexão em série é fácil de ser fabricada, porém raramente é usada na prática por pelo menos duas razões. Em primeiro lugar, ela é menos confiável; quando uma lâmpada falha, todas as demais ficam apagadas. Em segundo, sua manutenção é mais difícil; quando uma lâmpada apresenta defeito, é preciso testar todas elas para ver qual está com defeito.

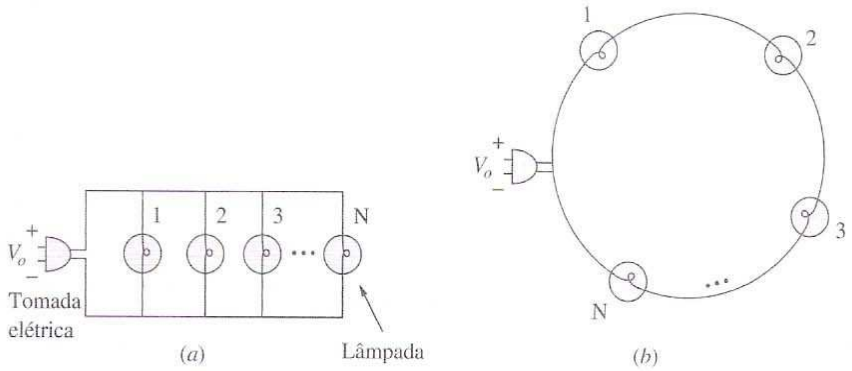


Figura 2.55 (*a*) Conexão em paralelo de lâmpadas; (*b*) Conexão em série de lâmpadas.

EXEMPLO 2.16

Três lâmpadas são conectadas a uma fonte de 9 V, conforme mostrado na Figura 2.56*a*. Calcule: (a) corrente total fornecida pela fonte; (b) corrente que passa por cada lâmpada; (c) resistência de cada lâmpada.

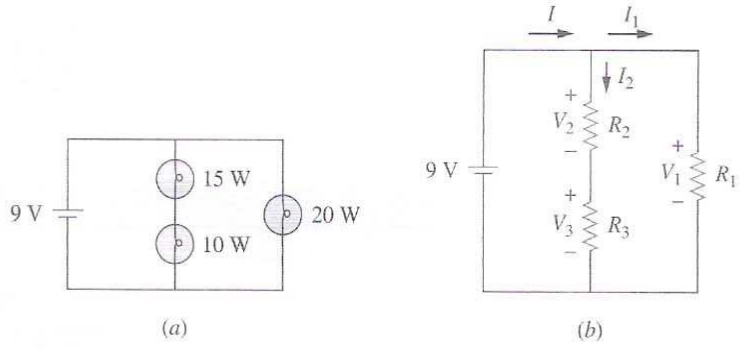


Figura 2.56 (*a*) Sistema de iluminação com três lâmpadas; (*b*) Modelo equivalente de circuito resistivo.

Solução: (a) A potência total fornecida pela fonte é igual à potência total absorvida pelas lâmpadas, ou seja:

$$p = 15 + 10 + 20 = 45 \text{ W}$$

Uma vez que $p = VI$, então a corrente total fornecida pela fonte é

$$I = \frac{p}{V} = \frac{45}{9} = 5 \text{ A}$$

(b) As lâmpadas podem ser representadas (modeladas) por resistores, como mostrado na Figura 2.56*b*. Visto que R_1 (lâmpada de 20 W) está em paralelo com a fonte bem como a associação em série de R_2 e R_3,

$$V_1 = V_2 + V_3 = 9 \text{ V}$$

A corrente que passa por R_1 é

$$I_1 = \frac{p_1}{V_1} = \frac{20}{9} = 2{,}222 \text{ A}$$

Pela LKC, a corrente que passa pela associação em série de R_2 e R_3 é

$$I_2 = I - I_1 = 5 - 2{,}222 = 2{,}778 \text{ A}$$

(c) Uma vez que $p = I^2R$,

$$R_1 = \frac{p_1}{I_1^2} = \frac{20}{2{,}222^2} = 4{,}05\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{p_2}{I_2^2} = \frac{15}{2{,}777^2} = 1{,}945\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{p_3}{I_3^2} = \frac{10}{2{,}777^2} = 1{,}297\ \Omega$$

PROBLEMA PRÁTICO 2.16

Consulte a Figura 2.55 e considere a existência de dez lâmpadas que podem ser associadas em paralelo e dez que podem ser ligadas em série, cada uma das quais com potência nominal de 40 W. Se a tensão da rede elétrica for 110 V para as ligações em série e em paralelo, calcule a corrente através de cada lâmpada para ambos os casos.

Resposta: 364 mA (paralelo), 3,64 A (série).

2.8.2 Projeto de medidores de CC

Por sua natureza, os resistores são usados para controlar o fluxo de corrente. Tiramos proveito dessa propriedade em várias aplicações, por exemplo, em um potenciômetro (Figura 2.57). O termo *potenciômetro*, derivado das palavras *potencial* e *medidor*, implica que o potencial possa ser medido. Ele é um dispositivo de três terminais que opera segundo o princípio da divisão de tensão e é, essencialmente, um divisor de tensão ajustável. Como um regulador de tensão, é usado para controlar o volume em rádios, TVs e outros aparelhos. Na Figura 2.57,

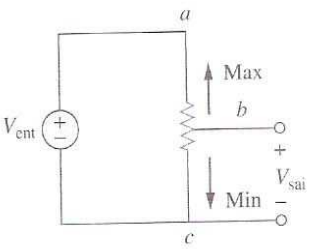


Figura 2.57 O potenciômetro no controle de níveis de potencial.

$$V_{sai} = V_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_{ac}} V_{ent} \tag{2.58}$$

Onde $R_{ac} = R_{ab} + R_{bc}$. Portanto, V_{sai} (tensão de saída) diminui ou aumenta à medida que o contato deslizante do potenciômetro se move, respectivamente, em direção a c ou a.

Outra aplicação em que os resistores são usados para controlar o fluxo de corrente é em medidores CC analógicos, amperímetro, voltímetro e ohmímetro, que medem a corrente, a tensão e a resistência, respectivamente, e cada um deles emprega o movimento do galvanômetro d'Arsonval, mostrado na Figura 2.58. Esse movimento consiste, basicamente, em uma bobina de núcleo de ferro móvel montada sobre um pivô entre os polos de um ímã permanente. Quando a corrente passa pela bobina, ela cria um torque que faz o ponteiro sofrer uma deflexão, e seu nível determina a deflexão do ponteiro, que é registrada em uma escala associada ao galvanômetro. Por exemplo, se o galvanômetro tiver uma especificação de 1 mA, 50 Ω, seria necessário 1 mA para provocar uma deflexão de fundo de escala no galvanômetro. Introduzindo-se circuitos adicionais ao do galvanômetro de d'Arsonval, um amperímetro, voltímetro ou ohmímetro podem ser construídos.

Um instrumento capaz de medir tensão, corrente e resistência é chamado *multímetro* ou *volt ohmímetro* (VOM).

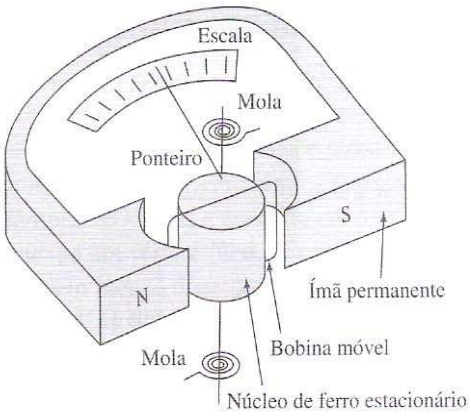


Figura 2.58 Galvanômetro de d'Arsonval.

Carga é um componente que está recebendo energia (um coletor de energia) em contraposição a um gerador que fornece energia (uma fonte de energia). Estudaremos mais sobre carga na Seção 4.9.1.

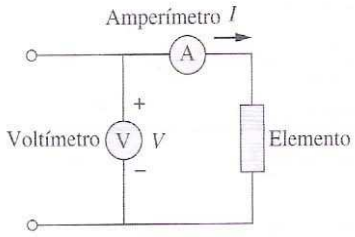
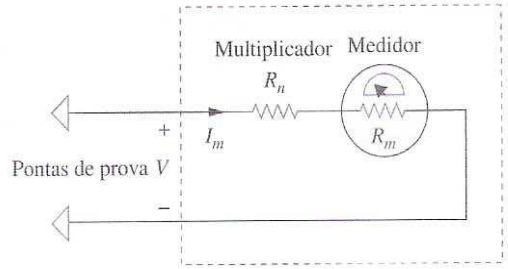
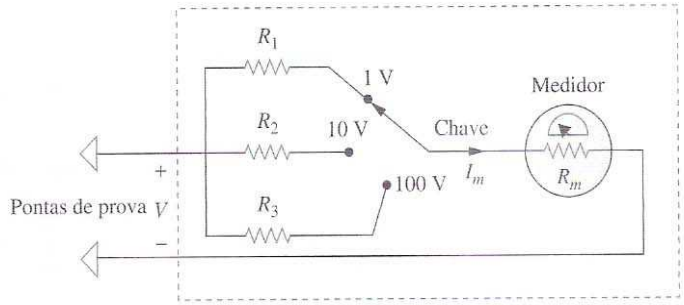


Figura 2.59 Conexão de um voltímetro e um amperímetro a um elemento.

Consideremos a Figura 2.59, em que um amperímetro e um voltímetro analógicos são conectados a um elemento. O voltímetro mede a tensão na *carga* e é, consequentemente, ligado em paralelo com o elemento. Conforme mostrado na Figura 2.60*a*, o voltímetro consiste em um galvanômetro de d'Arsonval em série com um resistor cuja resistência R_m é, deliberadamente, projetada para ser muito grande (teoricamente infinita) para poder minimizar a corrente absorvida do circuito. Para estender o intervalo de tensão que o medidor pode medir, normalmente se colocam resistores multiplicadores em série com os voltímetros, como na Figura 2.60*b*. O voltímetro multiescala da Figura 2.60*b* é capaz de medir tensões de 0 V a 1 V, 0 V a 10 V ou 0 V a 100 V, dependendo se a chave estiver conectada, respectivamente, a R_1, R_2 ou R_3.



(*a*)



(*b*)

Figura 2.60 Voltímetros: (*a*) modelo de uma escala; (*b*) modelo multiescala.

Calculemos o resistor multiplicador R_n para o voltímetro de uma escala da Figura 2.60*a*, ou $R_n = R_1$, R_2 ou R_3, para o voltímetro multiescala da Figura 2.60*b*. Precisamos determinar o valor de R_n a ser conectado em série com a resistência interna R_m do voltímetro. Em qualquer projeto, consideramos o pior caso. Aqui, a pior situação ocorre quando a corrente de fundo de escala $I_{fs} = I_m$ passa pelo medidor. Isso também deveria corresponder à leitura de tensão

máxima ou a tensão de fundo de escala, V_{fs}. Já que a resistência multiplicadora, R_n, está em série com a resistência interna, R_m,

$$V_{fs} = I_{fs}(R_n + R_m) \tag{2.59}$$

A partir disso, obtemos

$$R_n = \frac{V_{fs}}{I_{fs}} - R_m \tag{2.60}$$

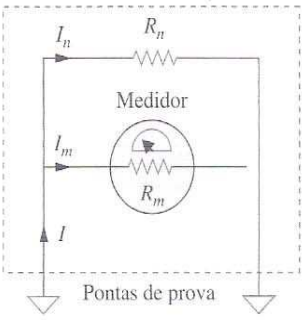
De modo similar, o amperímetro mede a corrente que passa pela carga e é conectado em série com ela. Conforme mostra a Figura 2.61*a*, o amperímetro consiste em um galvanômetro de d'Arsonval em paralelo com um resistor cuja resistência R_m é, deliberadamente, projetada para ser muito pequena (teoricamente, zero) para minimizar a queda de tensão. Para possibilitar a multiescala, normalmente são conectados resistores shunt em paralelo com R_m, conforme mostrado na Figura 2.61*b*, que permitem que o medidor meça nas escalas de 0 a 10 mA, 0 a 100 mA ou 0 a 1 A, dependendo se a chave estiver conectada a R_1, R_2 ou R_3, respectivamente.

Agora nosso objetivo é obter o R_n shunt multiplicador para o amperímetro de escala única da Figura 2.61*a*, ou $R_n = R_1$, R_2 ou R_3 para o amperímetro multiescala na Figura 2.61*b*. Podemos notar que R_m e R_n estão em paralelo e que na leitura de fundo de escala $I = I_{fs} = I_m + I_n$, em que I_n é a corrente que passa pelo resistor shunt R_n. Ao aplicar o princípio da divisão da corrente nos leva a

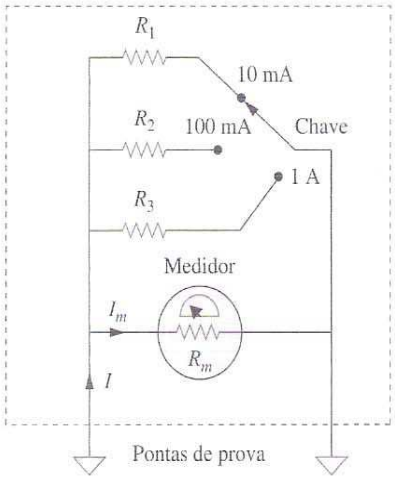
$$I_m = \frac{R_n}{R_n + R_m} I_{fs}$$

ou

$$R_n = \frac{I_m}{I_{fs} - I_m} R_m \tag{2.61}$$



(*a*)



(*b*)

Figura 2.61 Amperímetros: (*a*) modelo de uma escala; (*b*) modelo multiescala.

A resistência R_x de um resistor linear pode ser medida de duas maneiras. Uma maneira indireta é medir a corrente I que passa pelo resistor conectando um amperímetro em série a ele e a tensão V através da conexão de um voltímetro em paralelo com ele, conforme pode ser visto na Figura 2.62*a*. Então

$$R_x = \frac{V}{I} \tag{2.62}$$

O método direto de medição da resistência é usar um ohmímetro. Um ohmímetro consiste, basicamente, em um galvanômetro de d'Arsonval, um resistor variável ou potenciômetro e uma bateria, como mostra a Figura 2.62*b*. Aplicando a LKT ao circuito da Figura 2.62*b*, temos

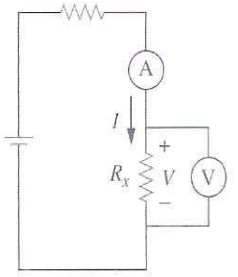
$$E = (R + R_m + R_x)I_m$$

ou

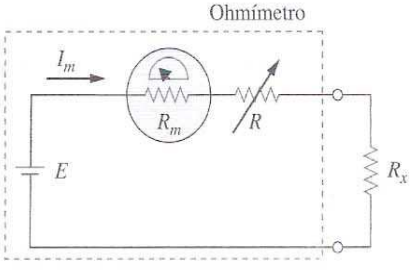
$$R_x = \frac{E}{I_m} - (R + R_m) \tag{2.63}$$

O resistor R é selecionado de modo que o medidor forneça uma deflexão de fundo de escala, ou seja, $I_m = I_{fs}$ quando $R_x = 0$. Isso resulta em

$$E = (R + R_m)I_{fs} \tag{2.64}$$



(*a*)



(*b*)

Figura 2.62 Duas formas de medir a resistência: (*a*) através de um amperímetro e um voltímetro; (*b*) através de um ohmímetro.

Substituindo a Equação (2.64) pela Equação (2.63), temos

$$R_x = \left(\frac{I_{fs}}{I_m} - 1\right)(R + R_m) \tag{2.65}$$

Conforme mencionado, os tipos de medidores aqui discutidos são conhecidos como medidores *analógicos* e se baseiam no galvanômetro de d'Arsonval. Outro tipo de medidor, denominado *medidor digital*, se baseia em elementos de circuito ativos como os amplificadores operacionais, por exemplo, um multímetro digital mostra medidas de tensão CC ou CA, corrente e resistência na forma de números discretos, em vez de usar a deflexão de um ponteiro sobre uma escala contínua como acontece em um multímetro analógico. Os medidores digitais provavelmente serão aqueles que você encontrará em laboratórios modernos. Entretanto, o projeto de medidores digitais está além do escopo deste livro.

EXEMPLO 2.17

Seguindo a configuração do voltímetro da Figura 2.60, projete um voltímetro para as seguintes escalas múltiplas:

(a) 0 a 1 V (b) 0 a 5 V (c) 0 a 50 V (d) 0 a 100 V

Considere que a resistência interna $R_m = 2\ \text{k}\Omega$ e a corrente de fundo de escala seja $I_{fs} = 100\ \mu\text{A}$.

Solução: Aplicamos a Equação (2.60) e supomos que R_1, R_2, R_3 e R_4 correspondem às escalas 0 a 1 V, 0 a 5 V, 0 a 50 V e 0 a 100 V, respectivamente.

(a) Para a escala de 0 a 1 V,

$$R_1 = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} - 2.000 = 10.000 - 2.000 = 8\ \text{k}\Omega$$

(b) Para a escala de 0 a 5 V,

$$R_2 = \frac{5}{100 \times 10^{-6}} - 2.000 = 50.000 - 2.000 = 48\ \text{k}\Omega$$

(c) Para a escala de 0 a 50 V,

$$R_3 = \frac{50}{100 \times 10^{-6}} - 2.000 = 500.000 - 2.000 = 498\ \text{k}\Omega$$

Biblioteca do Congresso.

PERFIS HISTÓRICOS

Samuel F. B. Morse (1791-1872), pintor norte-americano, inventou o telégrafo, a primeira aplicação prática comercial da eletricidade.

Morse nasceu em Charlestown, Massachusetts, e estudou em Yale e na Royal Academy of Arts, em Londres, para se tornar um artista. Na década de 1830, ficou intrigado com o desenvolvimento de um telégrafo. Ele tinha um protótipo em 1836 e submeteu seu invento à obtenção de uma patente em 1838. O senado norte-americano destinou verbas para Morse construir uma linha telegráfica entre as cidades de Baltimore e Washington, D.C. Em 24 de maio de 1844, enviou sua primeira mensagem famosa: "Que milagre Deus operou!". Morse também criou um sistema de código formado por pontos e traços para representação de letras e números, para envio de mensagens via telégrafo. A criação do telégrafo levou à invenção do telefone.

(d) Para a escala de 0 a 100 V,

$$R_4 = \frac{100\ \text{V}}{100 \times 10^{-6}} - 2.000 = 1.000.000 - 2.000 = 998\ \text{k}\Omega$$

Note que a razão entre a resistência total $(R_n + R_m)$ e a tensão de fundo de escala V_{fs} é constante e igual a $1/I_{fs}$ para as quatro escalas. Essa razão (dada em ohms por volt ou Ω/V) é conhecida como *sensibilidade* do voltímetro. Quanto maior a sensibilidade, melhor o voltímetro.

PROBLEMA PRÁTICO 2.17

Seguindo a disposição da Figura 2.61, projete um amperímetro para as seguintes escalas múltiplas:

(a) 0 a 1 A (b) 0 a 100 mA (c) 0 a 10 mA

Suponha que a corrente de fundo de escala seja $I_m = 1$ mA e a resistência interna do amperímetro $R_m = 50\ \Omega$.

Resposta: Resistores shunt: 50 mΩ, 505 mΩ, 5,556 Ω.

2.9 Resumo

1. Um resistor é um elemento passivo no qual a tensão v nele é diretamente proporcional à corrente i que passa por ela. Isto é, um resistor é um dispositivo que obedece à lei de Ohm,

$$v = iR$$

onde R é a resistência do resistor.

2. Um curto-circuito elétrico é um resistor (um fio perfeitamente condutor) com resistência zero ($R = 0$). Um circuito aberto é um resistor com resistência infinita ($R = \infty$).
3. A condutância G de um resistor é o inverso de sua resistência:

$$G = \frac{1}{R}$$

4. Um ramo é um elemento simples de dois terminais em um circuito elétrico. Um nó é o ponto de conexão entre dois ou mais ramos. Um laço é um caminho fechado em um circuito. O número de ramos b, o número de nós n e o número de laços independentes l em uma rede estão relacionados da seguinte forma

$$b = l + n - 1$$

5. A lei das correntes de Kirchhoff (LKC), ou lei dos nós, afirma que as correntes em qualquer nó têm uma soma algébrica igual a zero. Em outras palavras, a soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.
6. A lei das tensões de Kirchhoff (LKT), ou lei das malhas, afirma que as tensões ao longo de um caminho fechado têm soma algébrica igual a zero. Em outras palavras, a soma das elevações de tensão é igual à soma das quedas de tensão.
7. Dois elementos estão em série quando estiverem conectados, sequencialmente, com a extremidade de um na extremidade do outro. Quando os elementos estão em série, a mesma corrente passa por eles ($i_1 = i_2$), e eles estão em paralelo se estiverem conectados aos mesmos dois nós. Elementos em paralelo sempre têm a mesma tensão entre eles ($v_1 = v_2$).

8. Quando dois resistores R_1 (=$1/G_1$) e R_2 (=$1/G_2$) estão em série, sua resistência e condutância equivalentes, R_{eq} e G_{eq}, são

$$R_{eq} = R_1 + R_2, \qquad G_{eq} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

9. Quando dois resistores R_1 (=$1/G_1$) e R_2 (=$1/G_2$) estão em paralelo, sua resistência e condutância equivalentes, R_{eq} e G_{eq}, são

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \qquad G_{eq} = G_1 + G_2$$

10. O princípio da divisão de tensão para dois resistores em série é

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \qquad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

11. O princípio da divisão de corrente para dois resistores em paralelo é

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

12. As fórmulas para uma transformação delta-Y são

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \qquad R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

13. As fórmulas para uma transformação Y-delta são

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \qquad R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

14. As leis básicas vistas neste capítulo podem ser aplicadas a problemas de iluminação elétrica e projeto de medidores CC.

Questões para revisão

2.1 O inverso da resistência é:

(a) tensão
(b) corrente
(c) condutância
(d) coulombs

2.2 Um aquecedor elétrico drena uma corrente de 10 A de uma linha de 120 V. A resistência do aquecedor é:

(a) 1.200 Ω (b) 120 Ω
(c) 12 Ω (c) 1,2 Ω

2.3 A queda de tensão em uma torradeira de 1,5 kW que absorve uma corrente de 12 A é:

(a) 18 kV (b) 125 V
(c) 120 V (d) 10,42 V

2.4 A corrente máxima que um resistor de 80 kΩ/2 W pode conduzir com segurança é:

(a) 160 kA (b) 40 kA
(c) 5 mA (d) 25 μA

2.5 Uma rede tem 12 ramos e 8 laços independentes. Quantos nós existem nessa rede?

(a) 19 (b) 17 (c) 5 (d) 4

2.6 A corrente I no circuito da Figura 2.63 é:

(a) –0,8 A
(b) –0,2 A
(c) 0,2 A
(d) 0,8 A

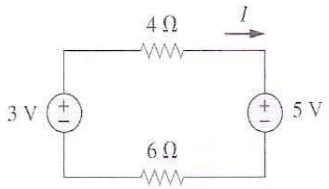


Figura 2.63 Esquema para a Questão para revisão 2.6.

2.7 A corrente I_o na Figura 2.64 é:

(a) –4 A (b) –2A
(c) 4 A (d) 16A

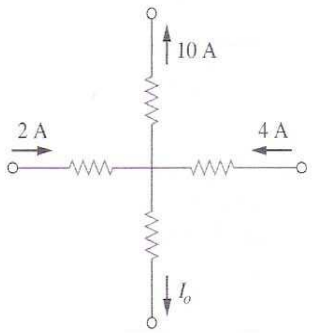


Figura 2.64 Esquema para a Questão para revisão 2.7.

2.8 No circuito da Figura 2.65, V é:

(a) 30 V
(b) 14 V
(c) 10 V
(d) 6 V

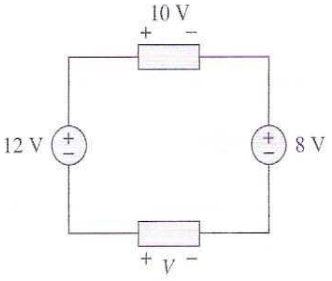


Figura 2.65 Esquema para a Questão para revisão 2.8.

2.9 Qual dos circuitos da Figura 2.66 fornecerá $V_{ab} = 7$ V?

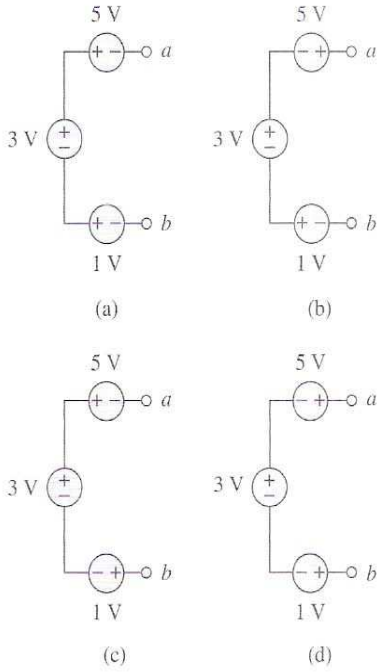


Figura 2.66 Esquema para a Questão para revisão 2.9.

2.10 No circuito da Figura 2.67, uma redução em R_3 leva a uma redução da:

(a) corrente em R_3
(b) tensão em R_3
(c) tensão em R_1
(d) potência dissipada em R_2
(e) nenhuma das alternativas anteriores

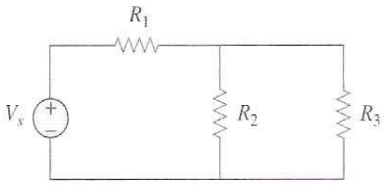


Figura 2.67 Esquema para a Questão para revisão 2.10.

Respostas: 2.1c, 2.2c, 2.3b, 2.4c, 2.5c, 2.6b, 2.7a, 2.8d, 2.9d, 2.10b, d.

Problemas

• Seção 2.2 Lei de Ohm

2.1 Elabore um problema, incluindo a solução, para ajudar estudantes a entender melhor a lei de Ohm. Use pelo menos dois resistores e uma fonte de tensão. Sugestão: você pode escolher dois resistores de uma vez ou um de cada vez, conforme achar melhor. Seja criativo.

2.2 Determine a resistência quente de uma lâmpada de 60 W/120 V.

2.3 Uma barra de silício tem 4 cm de comprimento com uma seção circular. Se a resistência da barra for 240 Ω à temperatura ambiente, qual o raio da seção transversal da barra?

2.4 (a) Calcule a corrente i na Figura 2.68 quando a chave se encontra na posição 1.

(b) Calcule a corrente quando a chave estiver na posição 2.

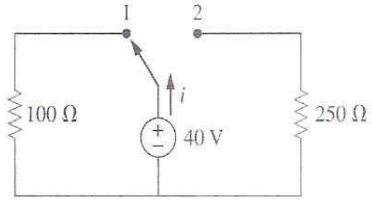


Figura 2.68 Esquema para o Problema 2.4.

Seção 2.3 Nós, ramos e laços

2.5 Para o gráfico de rede da Figura 2.69, determine o número de nós, ramos e laços.

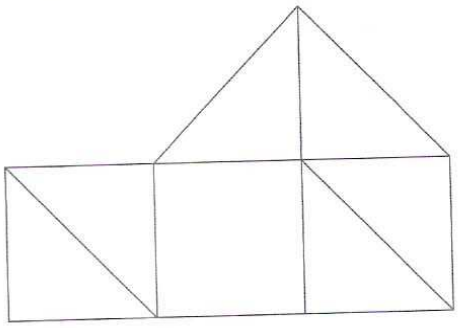


Figura 2.69 Esquema para o Problema 2.5.

2.6 No gráfico de rede mostrado na Figura 2.70, determine o número de ramos e nós.

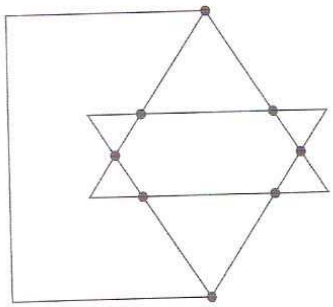


Figura 2.70 Esquema para o Problema 2.6.

2.7 Determine o número de ramos e nós no circuito da Figura 2.71.

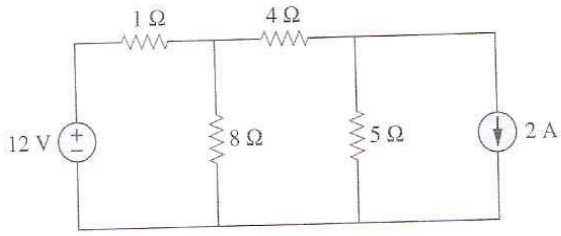


Figura 2.71 Esquema para o Problema 2.7.

Seção 2.4 Leis de Kirchhoff

2.8 Elabore um problema, incluindo a solução, para ajudar outros estudantes a entender melhor a lei de Kirchhoff para correntes (LKC). Elabore-o especificando os valores de i_a, i_b e i_c mostrados na Figura 2.72 e solicite aos estudantes para calcular os valores de i_1, i_2 e i_3. Procure especificar valores reais de corrente.

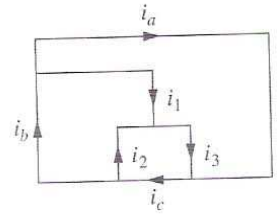


Figura 2.72 Esquema para o Problema 2.8.

2.9 Determine i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura 2.73.

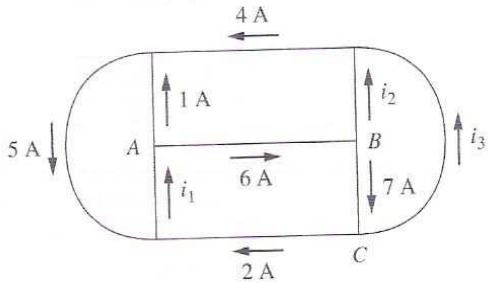


Figura 2.73 Esquema para o Problema 2.9.

2.10 Determine i_1 e i_2 no circuito da Figura 2.74.

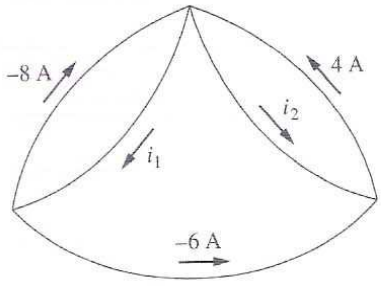


Figura 2.74 Esquema para o Problema 2.10.

2.11 No o circuito da Figura 2.75, determine V_1 e V_2.

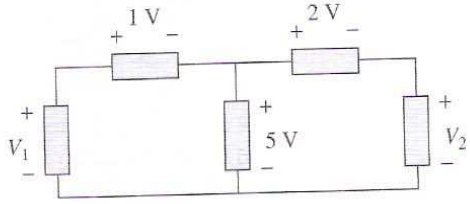


Figura 2.75 Esquema para o Problema 2.11.

2.12 No circuito da Figura 2.76, calcule v_1, v_2 e v_3.

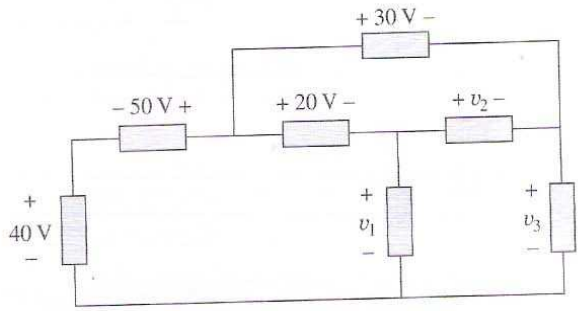


Figura 2.76 Esquema para o Problema 2.12.

2.13 Para o circuito da Figura 2.77, use a LKC para encontrar as correntes nos ramos I_1 a I_4.

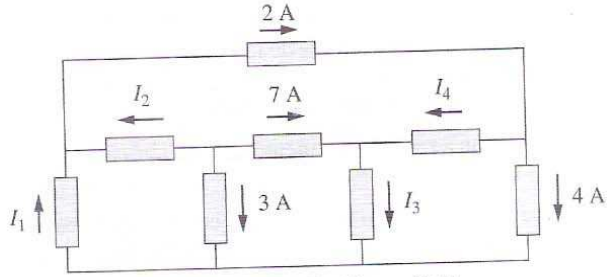


Figura 2.77 Esquema para o Problema 2.13.

2.14 Dado o circuito da Figura 2.78, use a LKT para determinar as tensões nos ramos V_1 a V_4.

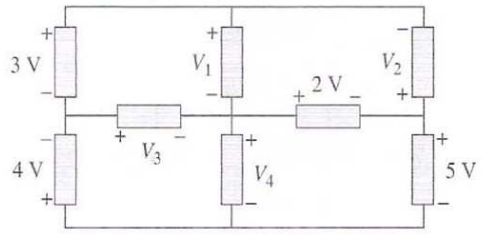


Figura 2.78 Esquema para o Problema 2.14.

2.15 Determine v e i_x, no circuito da Figura 2.79.

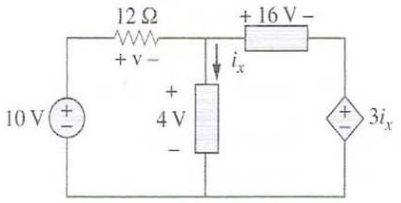


Figura 2.79 Esquema para o Problema 2.15.

2.16 Determine V_o no circuito da Figura 2.80.

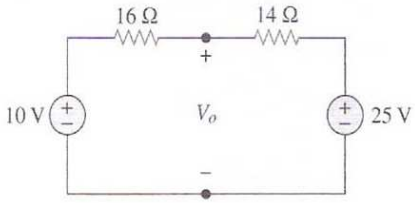


Figura 2.80 Esquema para o Problema 2.16.

2.17 Obtenha v_1 a v_3 no circuito da Figura 2.81.

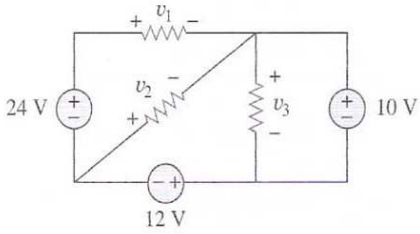


Figura 2.81 Esquema para o Problema 2.17.

2.18 Determine I e V_{ab} no circuito da Figura 2.82.

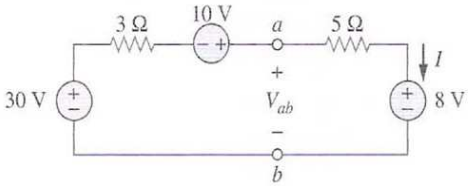


Figura 2.82 Esquema para o Problema 2.18.

2.19 A partir circuito da Figura 2.83, determine I, a potência dissipada pelo resistor e a potência fornecida por cada fonte.

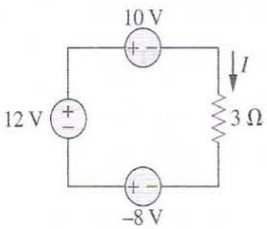


Figura 2.83 Esquema para o Problema 2.19.

2.20 Determine i_o no circuito da Figura 2.84.

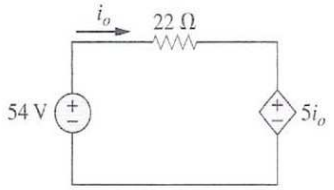


Figura 2.84 Esquema para o Problema 2.20.

2.21 Determine V_x no circuito da Figura 2.85.

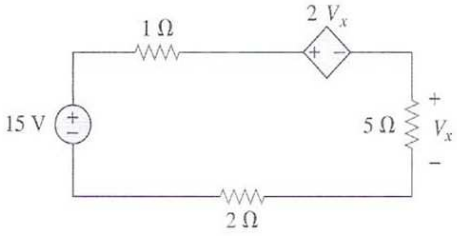


Figura 2.85 Esquema para o Problema 2.21.

2.22 Determine V_o no circuito da Figura 2.86 e a potência absorvida pela fonte controlada.

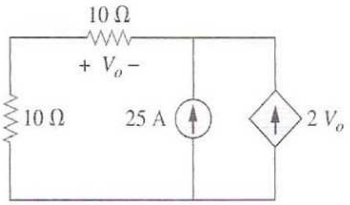


Figura 2.86 Esquema para o Problema 2.22.

2.23 No circuito mostrado na Figura 2.87, determine v_x e a potência absorvida pelo resistor de 12 Ω.

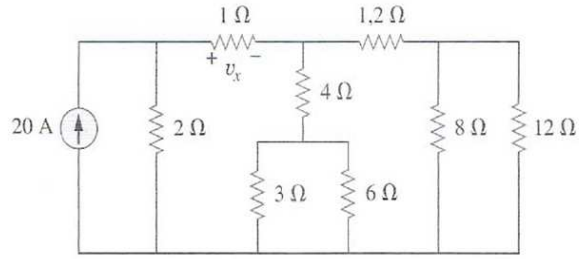


Figura 2.87 Esquema para o Problema 2.23.

2.24 Para o circuito da Figura 2.88, determine V_o/V_s em termos de α, R_1, R_2, R_3 e R_4. Se $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, qual o valor de α que produzirá $|V_o/V_s| = 10$?

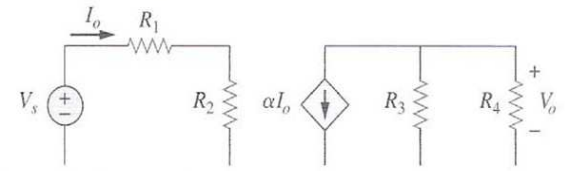


Figura 2.88 Esquema para o Problema 2.24.

2.25 Para a rede da Figura 2.89, determine a corrente, a tensão e a potência associadas ao resistor de 20 kΩ.

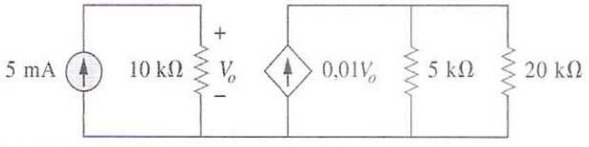


Figura 2.89 Esquema para o Problema 2.25.

• Seções 2.5 e 2.6 Resistores em série e em paralelo

2.26 Para o circuito da Figura 2.90, $i_o = 3$ A. Calcule i_x e a potência total dissipada pelo circuito.

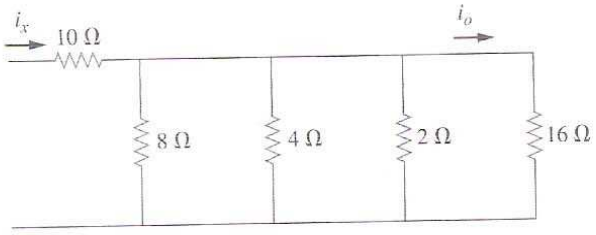


Figura 2.90 Esquema para o Problema 2.26.

2.27 Calcule I_o no circuito da Figura 2.91.

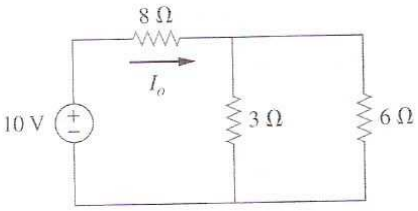


Figura 2.91 Esquema para o Problema 2.27.

2.28 Elabore um problema, usando a Figura 2.92, para ajudar outros estudantes a entender melhor os circuitos em série e em paralelo.

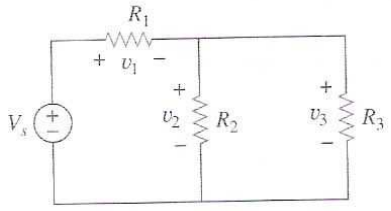


Figura 2.92 Esquema para o Problema 2.28.

2.29 Todos os resistores na Figura 2.93 são de 5 Ω cada. Determine R_{eq}.

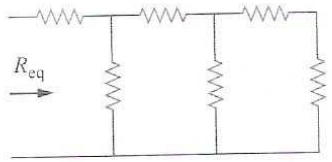


Figura 2.93 Esquema para o Problema 2.29.

2.30 Determine a R_{eq} para o circuito da Figura 2.94.

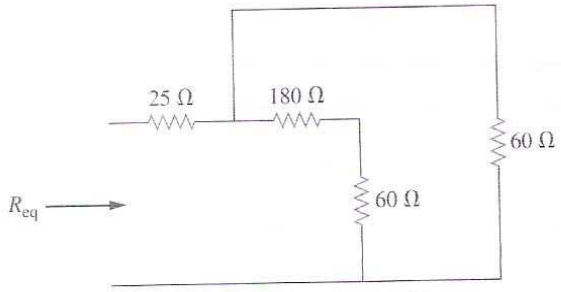


Figura 2.94 Esquema para o Problema 2.30.

2.31 Para o circuito da Figura 2.95, determine i_1 a i_5.

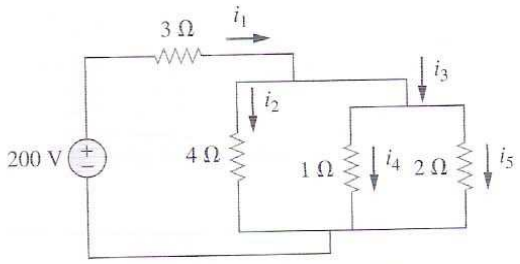


Figura 2.95 Esquema para o Problema 2.31.

2.32 Determine i_1 a i_4 no circuito da Figura 2.96.

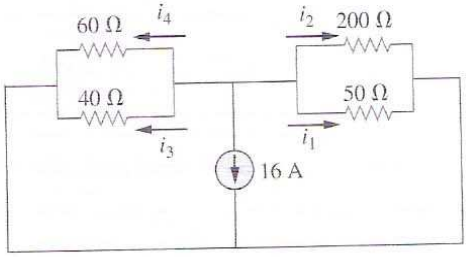


Figura 2.96 Esquema para o Problema 2.32.

2.33 Obtenha v e i no circuito da Figura 2.97.

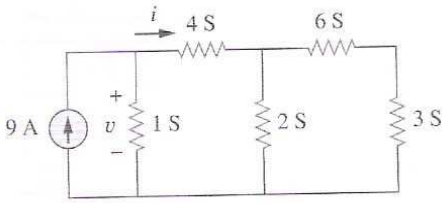


Figura 2.97 Esquema para o Problema 2.33.

2.34 Usando associações de resistências em série/paralelo, determine a resistência equivalente vista pela fonte no circuito da Figura 2.98 e a potência total dissipada pela rede de resistores.

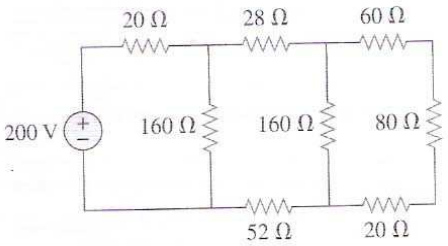


Figura 2.98 Esquema para o Problema 2.34.

2.35 Calcule V_o e I_o no circuito da Figura 2.99.

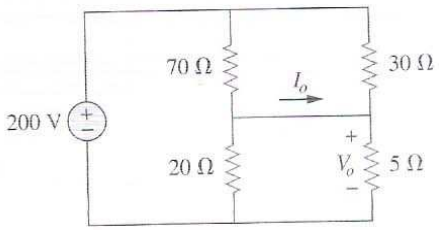


Figura 2.99 Esquema para o Problema 2.35.

2.36 Determine i e V_o no circuito da Figura 2.100.

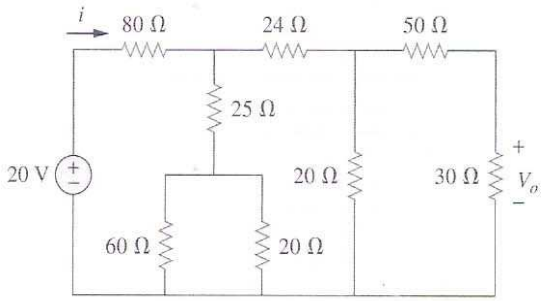


Figura 2.100 Esquema para o Problema 2.36.

2.37 Determine R para o circuito da Figura 2.101.

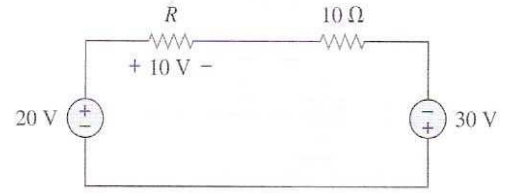


Figura 2.101 Esquema para o Problema 2.37.

2.38 Determine R_{eq} e i_o no circuito da Figura 2.102.

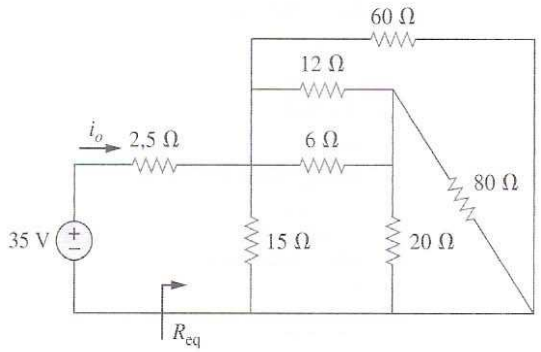


Figura 2.102 Esquema para o Problema 2.38.

2.39 Determine R_{eq} para cada circuito mostrado na Figura 2.103.

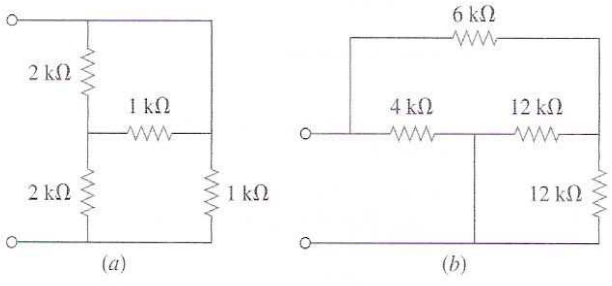


Figura 2.103 Esquema para o Problema 2.39.

2.40 Para a rede em cascata da Figura 2.104, determine I e R_{eq}.

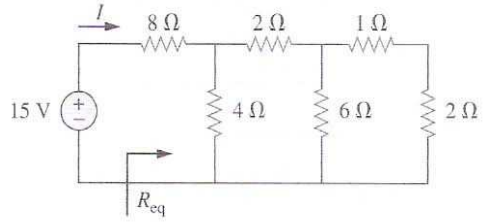


Figura 2.104 Esquema para o Problema 2.40.

2.41 Se $R_{eq} = 50\ \Omega$ no circuito da Figura 2.105, determine R.

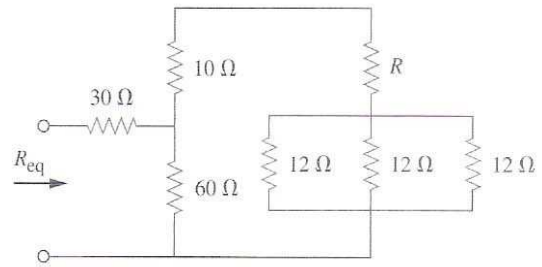
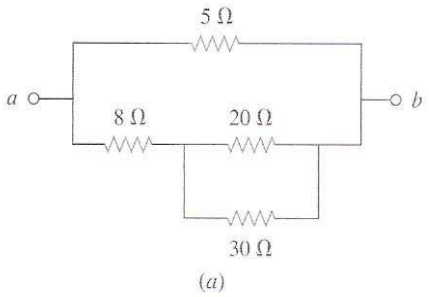


Figura 2.105 Esquema para o Problema 2.41.

2.42 Reduza cada um dos circuitos na Figura 2.106 a um único resistor nos terminais a-b.



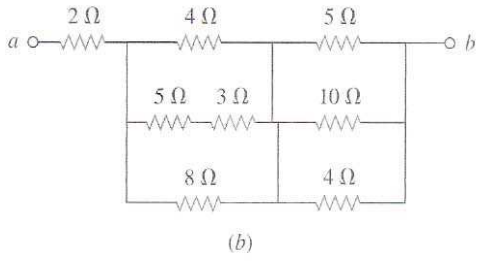
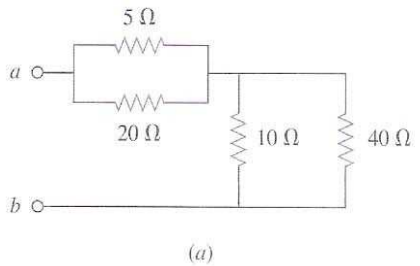


Figura 2.106 Esquema para o Problema 2.42.

2.43 Calcule a resistência equivalente R_{ab} nos terminais a-b para cada um dos circuitos da Figura 2.107.



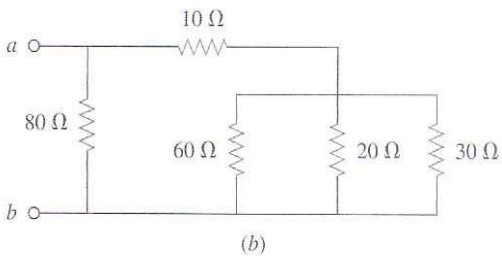


Figura 2.107 Esquema para o Problema 2.43.

2.44 Para o circuito da Figura 2.108, calcule a resistência equivalente nos terminais *a-b*.

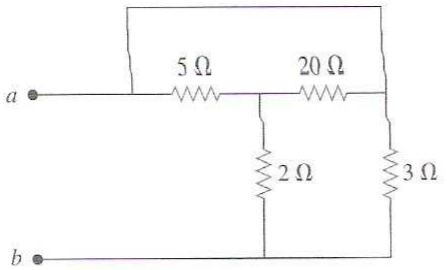
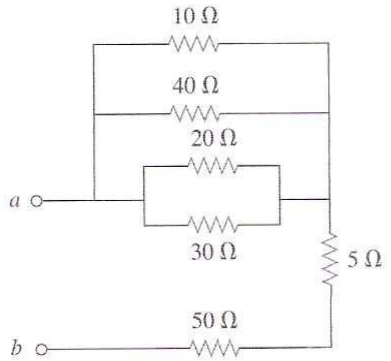
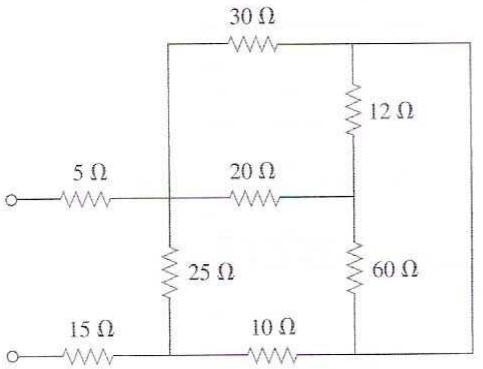


Figura 2.108 Esquema para o Problema 2.44.

2.45 Determine a resistência equivalente nos terminais *a-b* de cada circuito na Figura 2.109.



(*a*)



(*b*)

Figura 2.109 Esquema para o Problema 2.45.

2.46 Determine *I* no circuito da Figura 2.110.

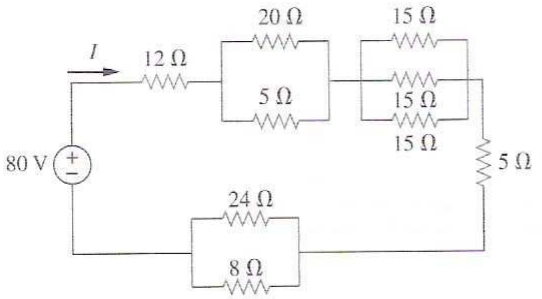


Figura 2.110 Esquema para o Problema 2.46.

2.47 Determine a resistência equivalente R_{ab} no circuito da Figura 2.111.

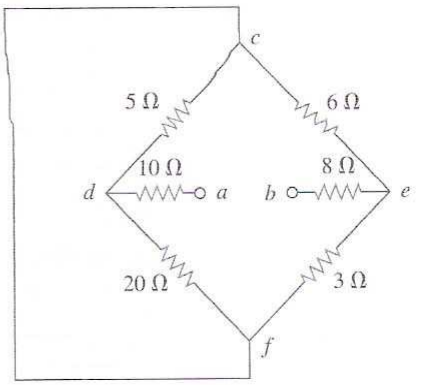


Figura 2.111 Esquema para o Problema 2.47.

• Seção 2.7 Transformações Y-delta

2.48 Converta os circuitos da Figura 2.112 de Y em Δ.

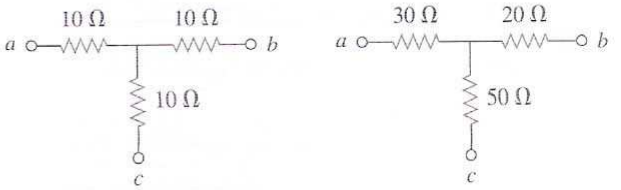


Figura 2.112 Esquema para o Problema 2.48.

2.49 Transforme os circuitos da Figura 2.113 de Δ em Y.

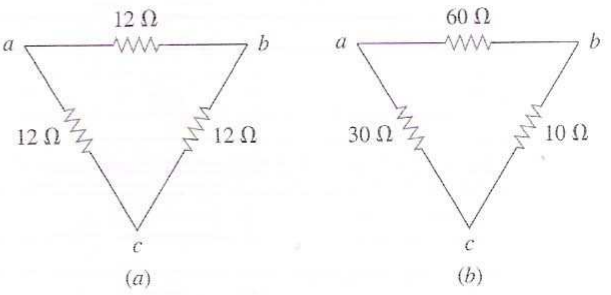


Figura 2.113 Esquema para o Problema 2.49.

2.50 Elabore um problema para ajudar outros estudantes a entender melhor as Transformações Y-Δ usando a Figura 2.114.

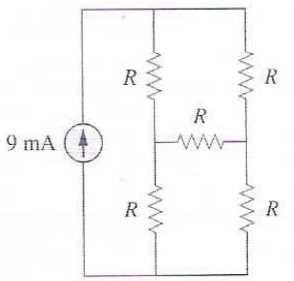


Figura 2.114 Esquema para o Problema 2.50.

2.51 Determine a resistência equivalente nos terminais *a-b* para cada um dos circuitos da Figura 2.115.

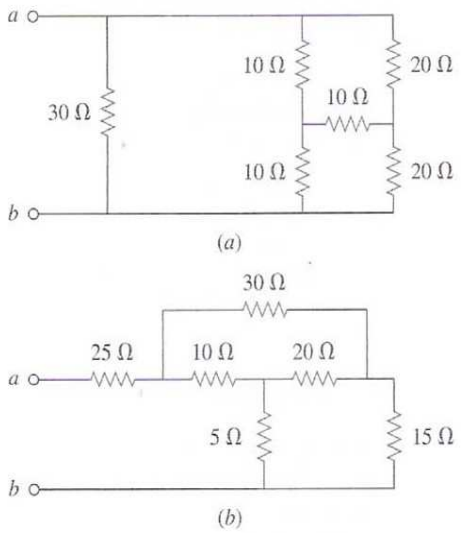


Figura 2.115 Esquema para o Problema 2.51.

*** 2.52** Para o circuito mostrado na Figura 2.116, determine a resistência equivalente. Todos os resistores são de 3 Ω.

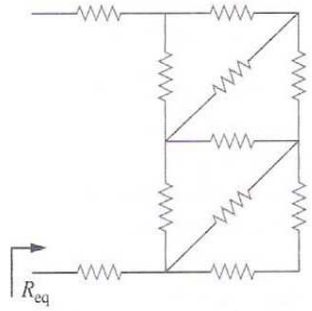


Figura 2.116 Esquema para o Problema 2.52.

*** 2.53** Determine a resistência equivalente R_{ab} em cada um dos circuitos da Figura 2.117. No item (b), todos os resistores possuem um valor de 30 Ω.

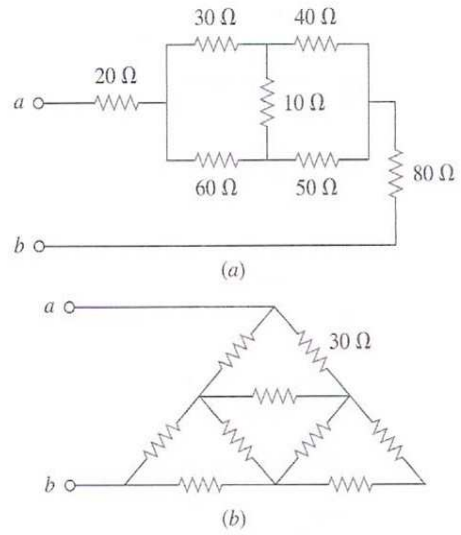


Figura 2.117 Esquema para o Problema 2.53.

* O asterisco indica um problema que constitui um desafio.

2.54 Considere o circuito da Figura 2.118. Determine a resistência equivalente nos terminais: (a) *a-b*, (b) *c-d*.

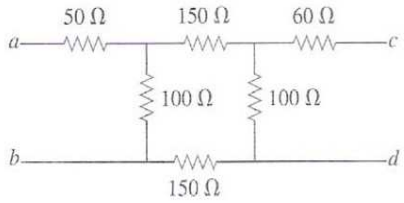


Figura 2.118 Esquema para o Problema 2.54.

2.55 Calcule I_o no circuito da Figura 2.119.

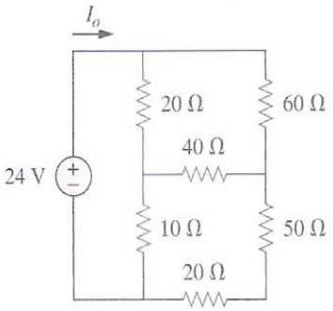


Figura 2.119 Esquema para o Problema 2.55.

2.56 Determine V no circuito da Figura 2.120.

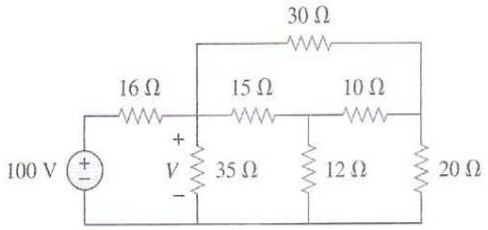


Figura 2.120 Esquema para o Problema 2.56.

*** 2.57** Determine R_{eq} e I no circuito da Figura 2.121.

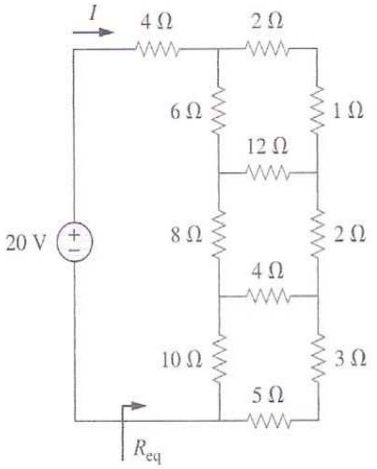


Figura 2.121 Esquema para o Problema 2.57.

• Seção 2.8 Aplicações

2.58 A lâmpada de 60 W na Figura 2.122 é de 120 V. Calcule V_s para fazer que a lâmpada opere nas condições estabelecidas.

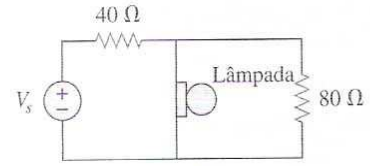


Figura 2.122 Esquema para o Problema 2.58.

2.59 Três lâmpadas estão conectadas em série a uma fonte de 120 V, conforme mostrado na Figura 2.123. Determine a corrente I que passa pelas lâmpadas. Cada lâmpada é específica para 120 V. Qual o valor da potência dissipada em cada lâmpada? Elas produzem muita luz?

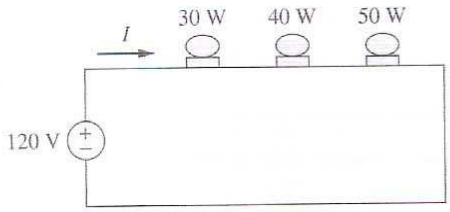


Figura 2.123 Esquema para o Problema 2.59.

2.60 Se as três lâmpadas do Problema 2.59 estiverem conectadas em paralelo a uma fonte de 120 V, calcule a corrente que passa em cada lâmpada.

2.61 Como engenheiro de projetos lhe foi solicitado projetar um sistema de iluminação formado por uma fonte de alimentação de 70 W e duas lâmpadas, conforme mostrado na Figura 2.124. Você deve selecionar as duas lâmpadas das três opções a seguir:

$R_1 = 80\ \Omega$, custo US$ 0,60 (tamanho-padrão)

$R_2 = 90\ \Omega$, custo US$ 0,90 (tamanho-padrão)

$R_3 = 100\ \Omega$, custo US$ 0,75 (tamanho não padronizado)

O sistema deve ser projetado para um custo mínimo de modo que $I = 1{,}2\ \text{A} \pm 5\%$.

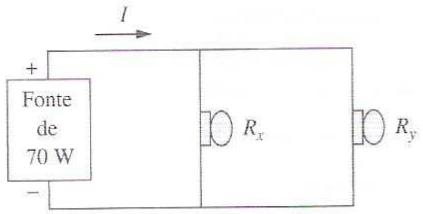


Figura 2.124 Esquema para o Problema 2.61.

2.62 Um sistema trifásico alimenta duas cargas A e B, conforme mostrado na Figura 2.125. A carga A é formada por um motor que drena uma corrente de 8 A, enquanto a carga B é um PC que consome 2 A. Considerando 10h/dia de uso por 365 dias e 6 centavos/kWh, calcule o custo anual de consumo de energia do sistema.

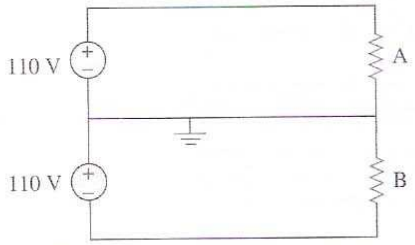


Figura 2.125 Esquema para o Problema 2.62.

2.63 Se um amperímetro com resistência interna de 100 Ω e capacidade de corrente de 2 mA deve medir 5 A, determine o valor da resistência necessária. Calcule a potência dissipada no resistor shunt.

2.64 O potenciômetro (resistor ajustável) R_x na Figura 2.126 deve ser projetado para ajustar a corrente i_x de 1 A a 10 A. Calcule os valores de R e R_x para que isso aconteça.

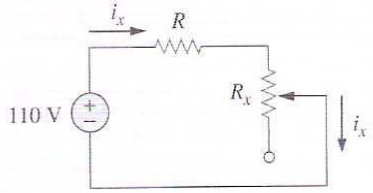


Figura 2.126 Esquema para o Problema 2.64.

2.65 Um galvanômetro de d'Arsonval com resistência interna de 1 kΩ requer 10 mA para produzir uma deflexão de fundo de escala. Calcule o valor de uma resistência em série necessária para medir 50 V de fundo de escala.

2.66 Um voltímetro de 20 kΩ/V indica uma leitura de fundo de escala de 10 V.

(a) Qual a resistência em série necessária para fazer que o medidor indique 50 V em fundo de escala?

(b) Qual a potência que o resistor dissipará quando o medidor indicar fundo de escala?

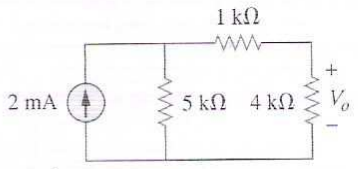
2.67 (a) Calcule a tensão V_o no circuito da Figura 2.127*a*.

(b) Determine a tensão V'_o medida quando um voltímetro com resistência interna de 6 kΩ estiver conectado, conforme mostrado na Figura 2.127*b*.

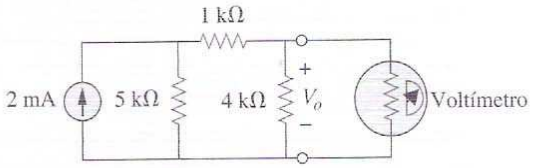
(c) A resistência finita do medidor introduz um erro na medida. Calcule o erro percentual como

$$\left|\frac{V_o - V'_o}{V_o}\right| \times 100\%$$

(d) Determine o erro percentual caso a resistência interna fosse de 36 kΩ.



(*a*)



(*b*)

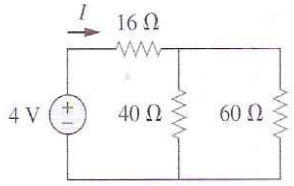
Figura 2.127 Esquema para o Problema 2.67.

2.68 (a) Determine a corrente I no circuito da Figura 2.128*a*.

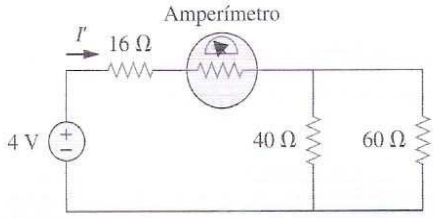
(b) Um ohmímetro com resistência interna de 1 Ω é inserido na rede para medir I', como mostrado na Figura 2.128*b*. Qual o valor de I'?

(c) Calcule o erro percentual introduzido pelo medidor como

$$\left|\frac{I - I'}{I}\right| \times 100\%$$



(a)



(b)

Figura 2.128 Esquema para o Problema 2.68.

2.69 Um voltímetro é usado para medir V_o no circuito da Figura 2.129. O modelo do voltímetro consiste em um voltímetro ideal em paralelo com um resistor de 100 kΩ. Digamos que $V_s = 40$ V, $R_s = 10$ kΩ e $R_1 = 20$ kΩ. Calcule V_o com e sem o voltímetro quando

(a) $R_2 = 1$ kΩ (b) $R_2 = 10$ kΩ (c) $R_2 = 100$ kΩ

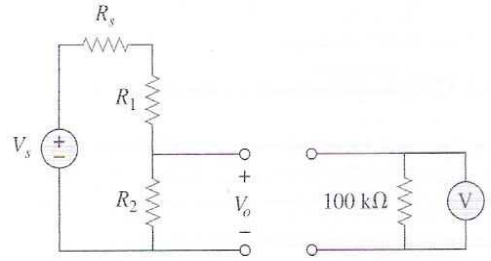


Figura 2.129 Esquema para o Problema 2.69.

2.70 (a) Considere a ponte de Wheatstone, mostrada na Figura 2.130. Calcule v_a, v_b e v_{ab}.

(b) Refaça o item (a) caso o GND fosse colocado em a em vez de o.

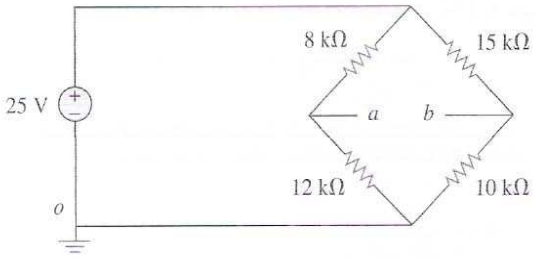


Figura 2.130 Esquema para o Problema 2.70.

2.71 A Figura 2.131 representa um modelo de um painel solar fotovoltaico. Dado que $V_s = 30$ V, $R_1 = 20$ Ω e $i_L = 1$ A, determine R_L.

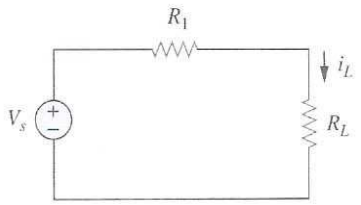


Figura 2.131 Esquema para o Problema 2.71.

2.72 Calcule V_o no circuito divisor de potência bidirecional na Figura 2.132.

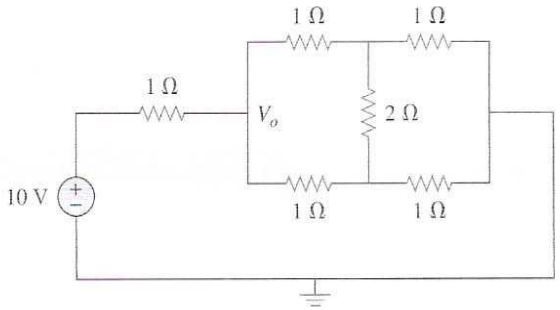


Figura 2.132 Esquema para o Problema 2.72.

2.73 Um modelo de amperímetro consiste em um amperímetro ideal em série com um resistor de 20 Ω. Ele é conectado com uma fonte de corrente e um resistor desconhecido R_x, como mostra a Figura 2.133. A leitura do amperímetro é anotada. Quando um potenciômetro R é adicionado e ajustado até que a leitura do amperímetro caia pela metade de sua leitura anterior, então $R = 65$ Ω. Qual é o valor de R_x?

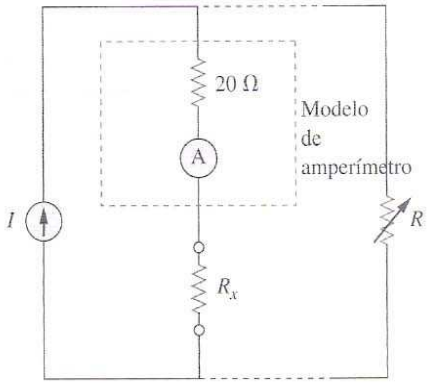


Figura 2.133 Esquema para o Problema 2.73.

2.74 O circuito da Figura 2.134 destina-se a controlar a velocidade de um motor de modo que ele absorva correntes de 5 A, 3 A e 1 A, quando a chave se encontrar nas posições alta, média e baixa, respectivamente. O motor pode ser modelado como uma resistência de carga de 20 mΩ. Determine as resistências em cascata para queda de tensão R_1, R_2 e R_3.

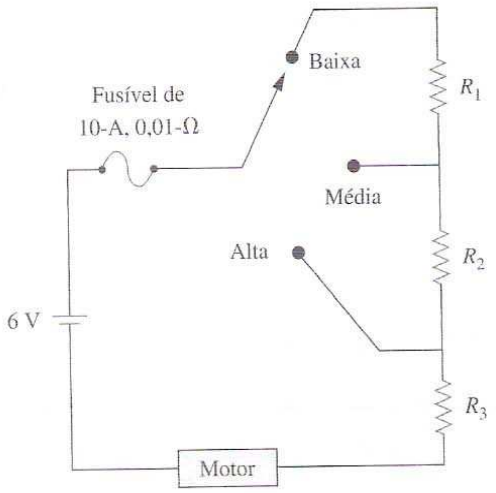


Figura 2.134 Esquema para o Problema 2.74.

2.75 Determine R_{ab} no circuito divisor de potência quadridirecional da Figura 2.135. Considere que cada elemento tem resistência igual a 1 Ω.

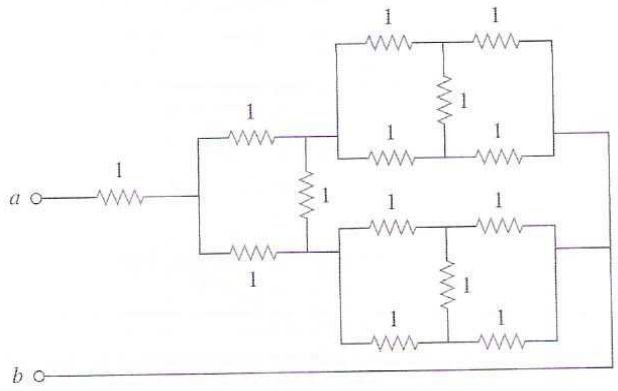


Figura 2.135 Esquema para o Problema 2.75.

Problemas abrangentes

2.76 Repita o Problema 2.75 para o divisor de oito vias mostrado na Figura 2.136.

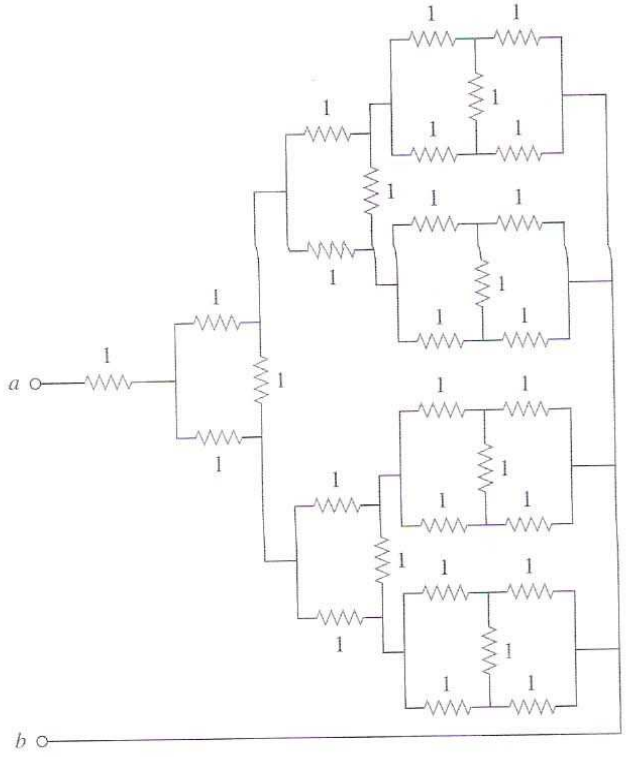


Figura 2.136 Esquema para o Problema 2.76.

2.77 Suponha que seu laboratório de circuitos tenha os seguintes resistores comerciais padrão disponíveis em grande quantidade:

1,8 Ω 20 Ω 300 Ω 24 kΩ 56 kΩ

Usando associações em série e em paralelo, e um número mínimo dos resistores disponíveis, defina como você obteria as seguintes resistências para projetar um circuito elétrico de:

(a) 5 Ω (b) 311,8 Ω (c) 40 kΩ (d) 52,32 kΩ

2.78 No circuito da Figura 2.137, o contato divide a resistência do potenciômetro entre αR e $(1-\alpha)R$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Determine v_o/v_s.

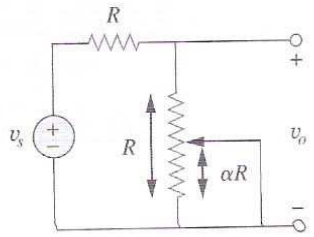


Figura 2.137 Esquema para o Problema 2.78.

2.79 Um apontador de lápis elétrico de 240 mW/6 V é conectado a uma fonte de 9 V, como mostra a Figura 2.138. Calcule o valor do resistor em série R_x para queda de tensão necessária para alimentar o apontador.

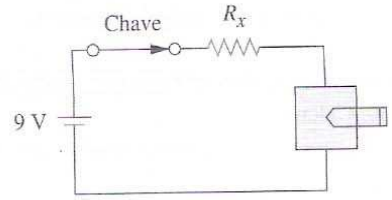


Figura 2.138 Esquema para o Problema 2.79.

2.80 Um alto-falante é conectado a um amplificador, conforme mostrado na Figura 2.139. Se um de 10 Ω consumir uma potência máxima de 12 W do amplificador, determine a potência máxima que um alto-falante de 4 Ω consumirá.

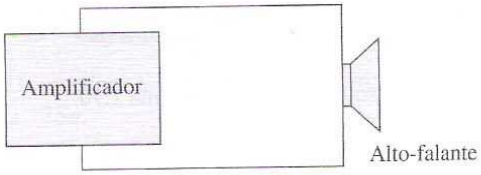


Figura 2.139 Esquema para o Problema 2.80.

2.81 Em determinada aplicação, o circuito da Figura 2.140 tem de ser projetado de forma a atender a dois critérios a seguir:

(a) $V_o/V_s = 0{,}05$

(b) $R_{eq} = 40\ k\Omega$

Se o resistor de carga de 5 kΩ for fixo, determine R_1 e R_2 para atender aos critérios.

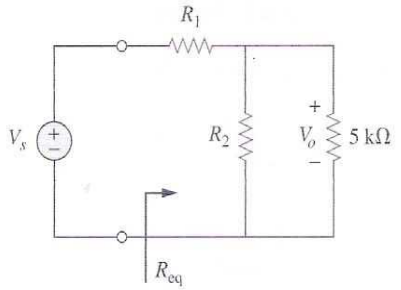


Figura 2.140 Esquema para o Problema 2.81.

2.82 O diagrama de pinos de um conjunto de resistências está representado na Figura 2.141. Determine a resistência equivalente entre os seguintes pontos:

(a) 1 e 2

(b) 1 e 3

(c) 1 e 4

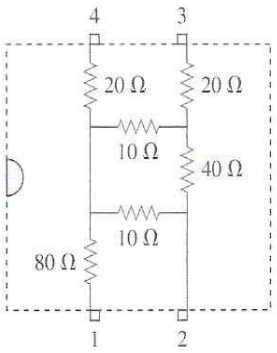


Figura 2.141 Esquema para o Problema 2.82.

2.83 Dois dispositivos sensíveis são especificados, como mostra a Figura 2.142. Determine os valores dos resistores R_1 e R_2 necessários para alimentar os dispositivos usando uma bateria de 24 V.

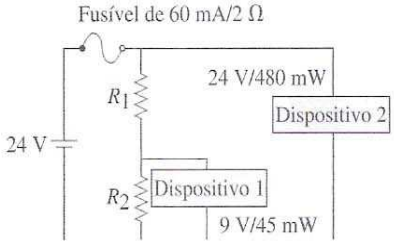


Figura 2.142 Esquema para o Problema 2.83.

3

MÉTODOS DE ANÁLISE

Nenhuma grande obra é realizada de forma apressada. Realizar uma grande descoberta científica, pintar uma grande tela, escrever um poema imortal, tornar-se um ministro ou um general famoso – realizar qualquer coisa de grandioso requer tempo, paciência e perseverança. Essas coisas são realizadas gradualmente, "pouco a pouco".

W. J. Wilmont Buxton

Progresso profissional

Carreira em eletrônica

Uma das áreas de aplicação para a análise de circuitos elétricos é a *eletrônica*. Esse termo foi usado, originalmente, para distinguir circuitos com corrente muito baixa, porém essa distinção não é mais válida, já que dispositivos semicondutores de potência operam com níveis de correntes elevados. Hoje, a eletrônica é considerada a ciência do movimento de cargas em um gás, no vácuo ou em um semicondutor, e a eletrônica moderna envolve transistores e circuitos transistorizados, sendo que os primeiros circuitos eletrônicos eram montados a partir de componentes; atualmente, muitos são produzidos na forma de circuitos integrados, fabricados em um substrato semicondutor ou *chip*.

Os circuitos eletrônicos encontram aplicações em diversas áreas como automação, transmissões de rádio e TV, computadores e instrumentação. Há uma gama enorme de dispositivos que usa circuitos eletrônicos, que é limitada apenas por nossa imaginação.

Um engenheiro eletricista normalmente realiza diversas funções e provavelmente usará, projetará ou construirá sistemas que incorporam alguma forma de circuitos eletrônicos. Portanto, a interpretação da operação e da análise desses circuitos é essencial para o profissional. A eletrônica se tornou uma especialidade distinta das demais disciplinas da engenharia elétrica. Como esse campo está sempre avançando, é necessário ser atualizado, e a melhor maneira para isso é tornar-se membro de alguma associação profissional, por exemplo, o Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), que, com mais de 300 mil associados, é a maior organização de profissionais do mundo, cujos associados se beneficiam enormemente dos inúmeros jornais, revistas, registros e anais de conferências/simpósios, publicados anualmente pelo instituto.

3.1 Introdução

Tendo compreendido as leis fundamentais da teoria dos circuitos (lei de Ohm e leis de Kirchhoff), agora estamos preparados para aplicar essas leis ao desenvolver duas técnicas poderosas para análise de circuitos: análise nodal, que se baseia em uma aplicação sistemática da lei de Kirchhoff para corrente (LKC), ou lei dos nós, e a análise de malhas, que se baseia em uma aplicação sistemática da lei de Kirchhoff para tensão (LKT), ou lei das malhas. Essas duas técnicas são tão importantes que este capítulo deve ser considerado o de maior destaque do livro todo. Consequentemente, os estudantes devem dedicar especial atenção a ele também.

Com as duas técnicas a serem desenvolvidas, teremos condições de analisar qualquer circuito linear pela obtenção de um conjunto de equações simultâneas que são, então, resolvidas para obter os valores necessários de corrente ou tensão. Um método para resolução de equações simultâneas envolve a regra de Cramer, que nos permite calcular variáveis do circuito como um quociente entre determinantes. Os exemplos do capítulo vão ilustrar esse método, e o Apêndice A também sintetiza brevemente os fundamente que o leitor precisa conhecer para aplicar essa regra. Outro método para resolução de equações simultâneas é usar o *MATLAB*, que é um *software* aplicativo, que possui um tutorial disponível no *site* (www.grupoa.com.br).

Neste capítulo, introduziremos também o emprego do *PSpice for Windows*, um programa de computador para simulação de circuitos que usaremos ao longo do texto. Finalmente, aplicaremos as técnicas aprendidas para analisar circuitos com transistores.

3.2 Análise nodal

A análise nodal fornece um procedimento genérico para análise de circuitos usando tensões nodais como variáveis de circuitos. Optar por tensões nodais em vez de tensões de elementos como essas variáveis é conveniente e reduz o número de equações que se deve resolver simultaneamente.

A análise nodal também é conhecida como *método do nó-tensão*.

Para simplificar as coisas, partiremos do pressuposto, nesta seção, de que os circuitos não contêm fontes de tensão, pois os que contêm serão analisados na seção seguinte.

Na *análise nodal*, estamos interessados em encontrar as tensões nos nós. Dado um circuito com n nós sem fontes de tensão, a análise envolve as três etapas a seguir:

Etapas para determinar tensões nodais:

1. Selecione um nó como referência. Atribua tensões $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ aos $n - 1$ nós restantes. As tensões são medidas em relação ao nó de referência.
2. Aplique a LKC a cada um dos $n - 1$ nós que não são de referência. Use a lei de Ohm para expressar as correntes nos ramos em termos de tensões nodais.
3. Resolva as equações simultâneas resultantes para obter as tensões nodais desconhecidas.

Agora, vamos explicar e aplicar as etapas dadas.

O primeiro passo na análise nodal é selecionar um nó como *nó de referência* ou *nó-base*. O nó de referência é comumente chamado *terra* (GND)

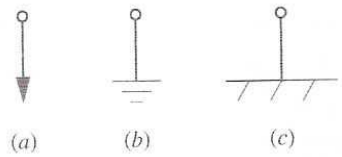


Figura 3.1 Símbolos comuns para indicar um nó de referência: (*a*) terra comum; (*b*) terra; (*c*) terra (chassi).

O número de nós que não são de referência é igual ao número de equações independentes que vamos deduzir.

uma vez que se supõe que ele tenha um potencial nulo, e esse nó é indicado por qualquer um dos três símbolos apontados na Figura 3.1. O tipo de terra na Figura 3.1*c* é denominado *terra* (*chassi*) e é usado em dispositivos onde o gabinete, caixa protetora para equipamento ou chassi atuam como um ponto de referência para todos os circuitos. Quando o potencial da terra é usado como referência, usamos o *terra* (*solo*) indicado na Figura 3.1*a* ou *b*. Vamos sempre usar o símbolo indicado na Figura 3.1*b*.

Assim que escolhemos um nó de referência, atribuímos designações de tensão aos nós que não são de referência. Consideremos, por exemplo, o circuito da Figura 3.2*a*. O nó 0 é o de referência ($v = 0$), enquanto aos nós 1 e 2 são atribuídos, respectivamente, as tensões v_1 e v_2. Tenha em mente que as tensões nodais são definidas em relação ao nó de referência. Conforme ilustrado na Figura 3.2*a*, cada tensão nodal é a elevação de tensão a partir do nó de referência ao que não é de referência correspondente ou simplesmente a tensão daquele nó em relação ao nó de referência.

Como segunda etapa, aplicamos a LKC a cada um dos nós que não são de referência do circuito. Para evitar o acúmulo de informações, o circuito elétrico da Figura 3.2*a* é redesenhado na Figura 3.2*b*, em que, agora, acrescentamos i_1, i_2 e i_3 como as correntes através dos resistores R_1, R_2 e R_3, respectivamente. Aplicando a LKC ao nó 1, temos

$$I_1 = I_2 + i_1 + i_2 \tag{3.1}$$

No nó 2, temos

$$I_2 + i_2 = i_3 \tag{3.2}$$

Agora, aplicamos a lei de Ohm para expressar as correntes desconhecidas i_1, i_2 e i_3 em termos de tensões nodais. A ideia central é ter em mente que os resistores são elementos passivos, pela convenção de sinal passivo, e por isso a corrente sempre deve fluir de um potencial mais elevado para um mais baixo.

Em um resistor, a corrente flui de um potencial **mais elevado** para um potencial **mais baixo**.

Podemos expressar esse princípio como

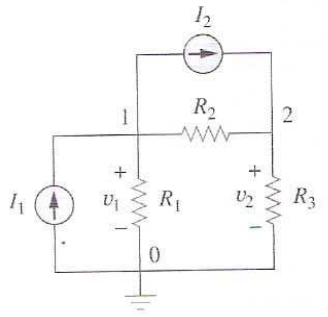
$$i = \frac{v_{\text{maior}} - v_{\text{menor}}}{R} \tag{3.3}$$

Note que esse princípio está de acordo com a maneira pela qual definimos resistência no Capítulo 2 (ver Figura 2.1). Sabendo disso, obtemos o seguinte da Figura 3.2*b*:

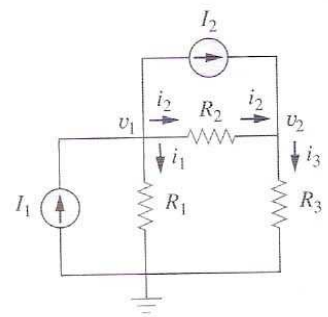
$$i_1 = \frac{v_1 - 0}{R_1} \quad \text{ou} \quad i_1 = G_1 v_1$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad \text{ou} \quad i_2 = G_2(v_1 - v_2) \tag{3.4}$$

$$i_3 = \frac{v_2 - 0}{R_3} \quad \text{ou} \quad i_3 = G_3 v_2$$



(*a*)



(*b*)

Figura 3.2 Circuito típico para análise nodal.

Substituindo a Equação (3.4) nas Equações (3.1) e (3.2) resulta, respectivamente, em

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \tag{3.5}$$

$$I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_3} \tag{3.6}$$

Em termos de condutâncias, as Equações (3.5) e (3.6) ficam

$$I_1 = I_2 + G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) \tag{3.7}$$

$$I_2 + G_2(v_1 - v_2) = G_3 v_2 \tag{3.8}$$

A terceira etapa na análise nodal é encontrar as tensões nodais. Se aplicarmos a lei dos nós aos $n - 1$ nós que não são de referência, obtemos $n - 1$ equações simultâneas, como as Equações (3.5) e (3.6) ou (3.7) e (3.8). Para o circuito da Figura 3.2, resolvemos as Equações (3.5) e (3.6) ou (3.7) e (3.8) para obter as tensões nodais v_1 e v_2, usando qualquer método-padrão como o da substituição, da eliminação, a regra de Cramer ou a inversão de matrizes. Para usar um dos dois últimos métodos, devem-se formular as equações simultâneas na forma matricial. Por exemplo, as Equações (3.7) e (3.8) podem ser formuladas na forma matricial como

O Apêndice A discute como usar a regra de Cramer.

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

que podem ser resolvidas para obter-se v_1 e v_2. A Equação (3.9) será generalizada na Seção 3.6. As equações simultâneas também podem ser resolvidas usando calculadoras ou pacotes de *software* como o *MATLAB*, *Mathcad*, *Maple* e *Quattro Pro*.

EXEMPLO 3.1

Calcule as tensões nodais no circuito mostrado na Figura 3.3*a*.

Solução: Considere a Figura 3.3*b*, na qual o circuito da Figura 3.3*a* foi preparado para análise nodal. Observe como as correntes são selecionadas para a aplicação da LKC. Exceto para os ramos com fontes de corrente, os nomes atribuídos às correntes são arbitrários, porém consistentes. (Por consistente queremos dizer que se, por exemplo, considerarmos que i_2 entra no resistor de 4 Ω do lado esquerdo, i_2 tem de deixar o resistor do lado direito.) O nó de referência é selecionado e as tensões nodais v_1 e v_2 agora devem ser determinadas.

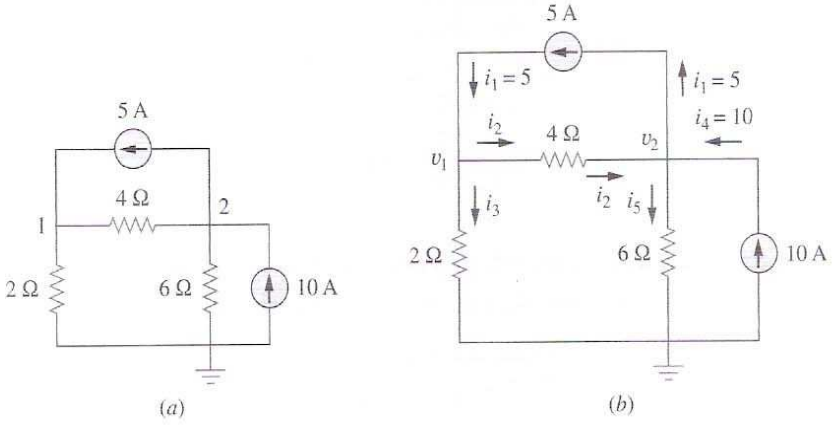


Figura 3.3 Esquema para o Exemplo 3.1: (*a*) circuito original; (*b*) circuito para análise.

No nó 1, aplicando a LKC e a lei de Ohm, obtemos

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad 5 = \frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_1 - 0}{2}$$

Multiplicando por 4 cada termo da última equação, obtemos

$$20 = v_1 - v_2 + 2v_1$$

ou

$$3v_1 - v_2 = 20 \tag{3.1.1}$$

No nó 2 fazemos o mesmo e obtemos

$$i_2 + i_4 = i_1 + i_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{4} + 10 = 5 + \frac{v_2 - 0}{6}$$

Multiplicando cada termo por 12, resulta em

$$3v_1 - 3v_2 + 120 = 60 + 2v_2$$

ou

$$-3v_1 + 5v_2 = 60 \tag{3.1.2}$$

Desta vez, temos duas Equações simultâneas (3.1.1) e (3.1.2). Podemos resolver as equações usando qualquer método e obter os valores de v_1 e v_2.

■ **MÉTODO 1** Usando a técnica de eliminação, adicionamos as Equações (3.1.1) e (3.1.2).

$$4v_2 = 80 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 20 \text{ V}$$

Substituindo $v_2 = 20$ na Equação (3.1.1), temos

$$3v_1 - 20 = 20 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{40}{3} = 13{,}333 \text{ V}$$

■ **MÉTODO 2** Para usar a regra de Cramer, precisamos colocar as Equações (3.1.1) e (3.1.2) na forma matricial como segue

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

O determinante da matriz é

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 3 = 12$$

Obtemos v_1 e v_2 como segue

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 60 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{100 + 60}{12} = 13{,}333 \text{ V}$$

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -3 & 60 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{180 + 60}{12} = 20 \text{ V}$$

que dá o mesmo resultado que obtivemos pelo método da eliminação.

Se precisarmos dos valores das correntes, podemos calculá-los facilmente a partir dos valores das tensões nodais.

$$i_1 = 5 \text{ A}, \quad i_2 = \frac{v_1 - v_2}{4} = -1{,}6668 \text{ A}, \quad i_3 = \frac{v_1}{2} = 6{,}666 \text{ A}$$

$$i_4 = 10 \text{ A}, \quad i_5 = \frac{v_2}{6} = 3{,}333 \text{ A}$$

O fato de i_2 ser negativo mostra que a corrente flui na direção oposta daquela suposta.

PROBLEMA PRÁTICO 3.1

Obtenha as tensões nodais no circuito da Figura 3.4.

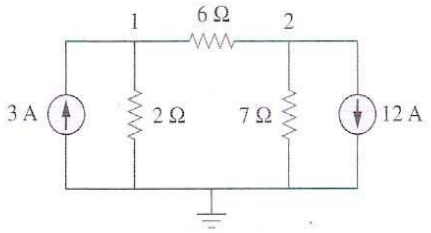


Figura 3.4 Esquema para o Problema prático 3.1.

Resposta: $v_1 = -6$ V, $v_2 = -42$ V

EXEMPLO 3.2

Determine as tensões na Figura 3.5*a*.

Solução: O circuito neste exemplo tem três nós de referência, diferentemente do exemplo anterior que tinha dois nós que não eram de referência. Atribuímos as tensões aos três nós, conforme mostra a Figura 3.5*b*, e identificamos as correntes.

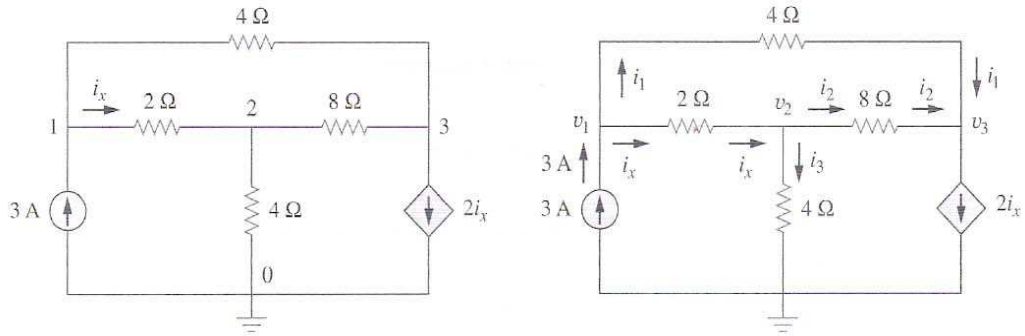


Figura 3.5 Esquema para o Exemplo 3.2: (*a*) circuito original; (*b*) circuito para análise.

No nó 1,

$$3 = i_1 + i_x \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2}$$

Multiplicando por 4 cada termo da última equação, obtemos

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 12 \tag{3.2.1}$$

No nó 2,

$$i_x = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_2 - v_3}{8} + \frac{v_2 - 0}{4}$$

Multiplicar por 8 e reorganizar os termos resulta em

$$-4v_1 + 7v_2 - v_3 = 0 \tag{3.2.2}$$

No nó 3,

$$i_1 + i_2 = 2i_x \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_3}{8} = \frac{2(v_1 - v_2)}{2}$$

Multiplicando por 8, reorganizando os termos, e dividindo por 3, obtemos

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \tag{3.2.3}$$

Temos três equações simultâneas a resolver para obter as tensões nodais v_1, v_2 e v_3. Resolveremos as equações das três maneiras.

MÉTODO 1 Usando a técnica de eliminação, adicionamos as Equações (3.2.1) e (3.2.3).

$$5v_1 - 5v_2 = 12$$

ou

$$v_1 - v_2 = \frac{12}{5} = 2{,}4 \tag{3.2.4}$$

Somando as Equações (3.2.2) e (3.2.3), temos

$$-2v_1 + 4v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 \tag{3.2.5}$$

Substituir a Equação (3.2.5) na Equação (3.2.4) resulta em

$$2v_2 - v_2 = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2{,}4, \quad v_1 = 2v_2 = 4{,}8 \text{ V}$$

Da Equação (3.2.3), obtemos

$$v_3 = 3v_2 - 2v_1 = 3v_2 - 4v_2 = -v_2 = -2{,}4 \text{ V}$$

Portanto,

$$v_1 = 4{,}8 \text{ V}, \quad v_2 = 2{,}4 \text{ V}, \quad v_3 = -2{,}4 \text{ V}$$

MÉTODO 2 Para usar a regra de Cramer, colocamos as Equações (3.2.1) a (3.2.3) na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

Desta, obtemos

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

onde Δ, Δ_1, Δ_2 e Δ_3 são os determinantes a serem calculados como segue. Conforme explicado no Apêndice A para calcular o determinante de uma matriz 3 por 3, repetimos as duas primeiras colunas e realizamos uma multiplicação cruzada.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{rrr} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$$= 21 - 12 + 4 + 14 - 9 - 8 = 10$$

De forma similar, obtemos

$$\Delta_1 = \begin{array}{rrr} 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 12 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array} = 84 + 0 + 0 - 0 - 36 - 0 = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{array}{rrr} 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array} = 0 + 0 - 24 - 0 - 0 + 48 = 24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 144 + 0 - 168 - 0 - 0 = -24$$

Portanto, determinamos

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{10} = 4{,}8 \text{ V}, \qquad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{10} = 2{,}4 \text{ V}$$

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{10} = -2{,}4 \text{ V}$$

conforme obtido através do Método 1.

■ **MÉTODO 3** Agora, usamos o *MATLAB* para resolver a matriz. A Equação (3.2.6) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{AV} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

onde **A** é a matriz quadrada 3 × 3; **B** é o vetor-coluna; e **V** é um vetor-coluna formado por v_1, v_2 e v_3 que queremos determinar. Usamos o *MATLAB* para determinar **V** como segue:

```
>>A = [3  -2  -1;  -4  7  -1;  2  -3  1];
>>B = [12  0  0]';
>>V = inv(A) * B
        4,8000
V =     2,4000
       -2,4000
```

Consequentemente, $v_1 = 4{,}8$ V, $v_2 = 2{,}4$ V e $v_3 = -2{,}4$ V, conforme obtido anteriormente.

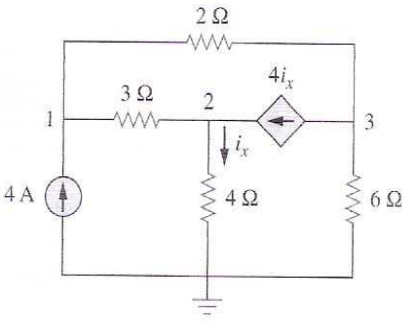


Figura 3.6 Esquema para o Problema prático 3.2.

PROBLEMA PRÁTICO 3.2

Determine as tensões nos três primeiros nós que não são de referência no circuito da Figura 3.6.

Resposta: $v_1 = 32$ V, $v_2 = -25{,}6$ V, $v_3 = 62{,}4$ V.

3.3 Análise nodal com fontes de tensão

Agora, vamos considerar como as fontes de tensão afetam a análise nodal. Usamos o circuito da Figura 3.7 para ilustração. Considere as duas possibilidades a seguir.

■ **CASO 1** Se a fonte de tensão estiver conectada entre o nó de referência e um de não referência, simplesmente configuramos a tensão no nó que não é de referência igual à tensão da fonte de tensão. Na Figura 3.7, por exemplo,

$$v_1 = 10 \text{ V} \tag{3.10}$$

Consequentemente, nossa análise é ligeiramente simplificada pelo conhecimento da tensão neste nó.

■ **CASO 2** Se a fonte de tensão (dependente ou independente) estiver conectada entre dois nós que não são de referência, eles formarão um *nó genérico* ou *supernó*; aplicamos tanto a LKC como a LKT para determinar as tensões nodais.

Um supernó pode ser considerado uma superfície que engloba a fonte de tensão e seus dois nós.

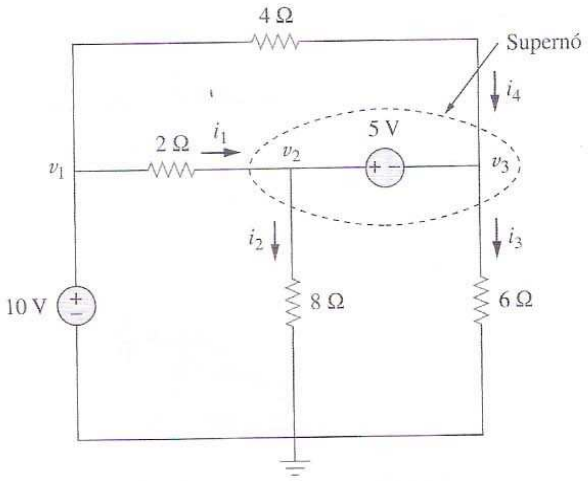


Figura 3.7 Um circuito com um supernó.

Um **supernó** é formado envolvendo-se uma fonte de tensão (dependente ou independente) conectada entre dois nós que não são de referência e quaisquer elementos conectados em paralelo com ele.

Na Figura 3.7, os nós 2 e 3 formam um supernó. (Poderíamos ter mais de dois nós formando um único supernó. Ver, por exemplo, o circuito na Figura 3.14.) Analisamos um circuito com supernós usando as mesmas três etapas mencionadas na seção anterior, exceto pelo fato de os supernós serem tratados diferentemente. Por quê? Porque um componente essencial da análise nodal é aplicar a LKC, que necessita conhecermos a corrente por meio de cada elemento. Não há nenhuma maneira de se saber de antemão a corrente que passa por uma tensão nodal, entretanto, a LKC tem de ser realizada em um supernó como qualquer outro nó. Logo, no supernó na Figura 3.7,

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \tag{3.11a}$$

ou

$$\frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - v_3}{4} = \frac{v_2 - 0}{8} + \frac{v_3 - 0}{6} \tag{3.11b}$$

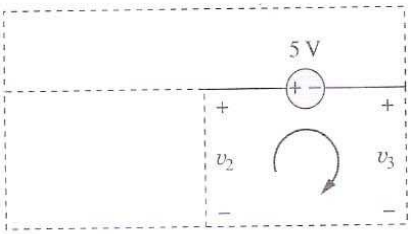


Figura 3.8 Aplicação da LKT em um supernó.

Para aplicar a lei de Kirchhoff para tensão no supernó na Figura 3.7, redesenhamos o circuito conforme mostrado na Figura 3.8. Percorrendo o laço no sentido horário, temos

$$-v_2 + 5 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 - v_3 = 5 \tag{3.12}$$

A partir das Equações (3.10), (3.11*b*) e (3.12), obtemos as tensões nodais.

Observe as seguintes propriedades de um supernó:

1. A fonte de tensão dentro do supernó fornece uma equação de restrição necessária para encontrar as tensões nodais.
2. Um supernó não tem nenhuma tensão própria.
3. Um supernó requer a aplicação tanto da LKC como da LKT.

EXEMPLO 3.3

Para o circuito apresentado na Figura 3.9, determine as tensões nodais.

Solução: O supernó contém a fonte de 2 V, nós 1 e 2 e o resistor de 10 Ω. Aplicando a LKC ao supernó, conforme mostrado na Figura 3.10*a*, resulta em

$$2 = i_1 + i_2 + 7$$

Expressando i_1 e i_2 em termos de tensões nodais

$$2 = \frac{v_1 - 0}{2} + \frac{v_2 - 0}{4} + 7 \quad \Rightarrow \quad 8 = 2v_1 + v_2 + 28$$

ou

$$v_2 = -20 - 2v_1 \tag{3.3.1}$$

Para obter a relação entre v_1 e v_2, aplicamos a LKT ao circuito da Figura 3.10*b*. Percorrendo o laço, obtemos

$$-v_1 - 2 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 + 2 \tag{3.3.2}$$

A partir das Equações (3.3.1) e (3.3.2), escrevemos

$$v_2 = v_1 + 2 = -20 - 2v_1$$

ou

$$3v_1 = -22 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -7{,}333 \text{ V}$$

e $v_2 = v_1 + 2 = -5{,}333$ V. Note que o resistor de 10 Ω não faz qualquer diferença, pois está conectado através do supernó.

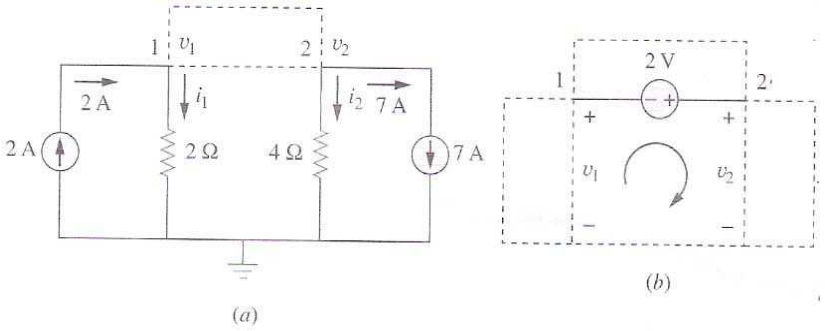


Figura 3.10 Aplicação da: (*a*) LKC ao supernó; (*b*) LKT ao laço.

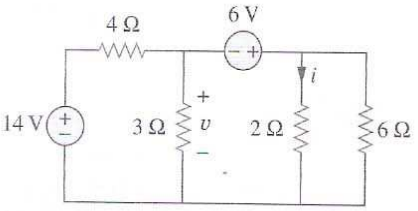


Figura 3.11 Esquema para o Problema prático 3.3.

Calcule v e i no circuito da Figura 3.11.

Resposta: – 400 mV, 2,8 A.

PROBLEMA PRÁTICO 3.3

EXEMPLO 3.4

Determine as tensões nodais no circuito da Figura 3.12.

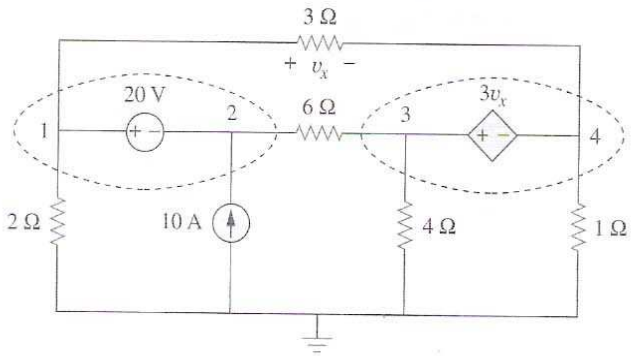


Figura 3.12 Esquema para o Exemplo 3.4.

Solução: Os nós 1 e 2 formam um supernó; o mesmo acontece com os nós 3 e 4. Aplicamos a LKC aos dois supernós como na Figura 3.13*a*. No supernó 1-2,

$$i_3 + 10 = i_1 + i_2$$

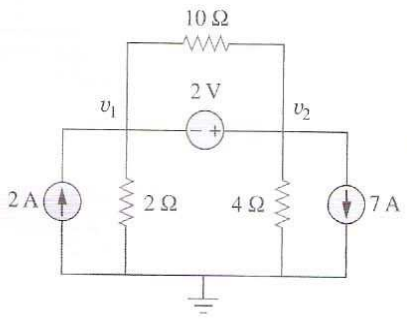


Figura 3.9 Esquema para o Exemplo 3.3.

Expressando isso em termos de tensões nodais,

$$\frac{v_3 - v_2}{6} + 10 = \frac{v_1 - v_4}{3} + \frac{v_1}{2}$$

ou

$$5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 \tag{3.4.1}$$

No supernó 3-4,

$$i_1 = i_3 + i_4 + i_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_4}{3} = \frac{v_3 - v_2}{6} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_3}{4}$$

ou

$$4v_1 + 2v_2 - 5v_3 - 16v_4 = 0 \tag{3.4.2}$$

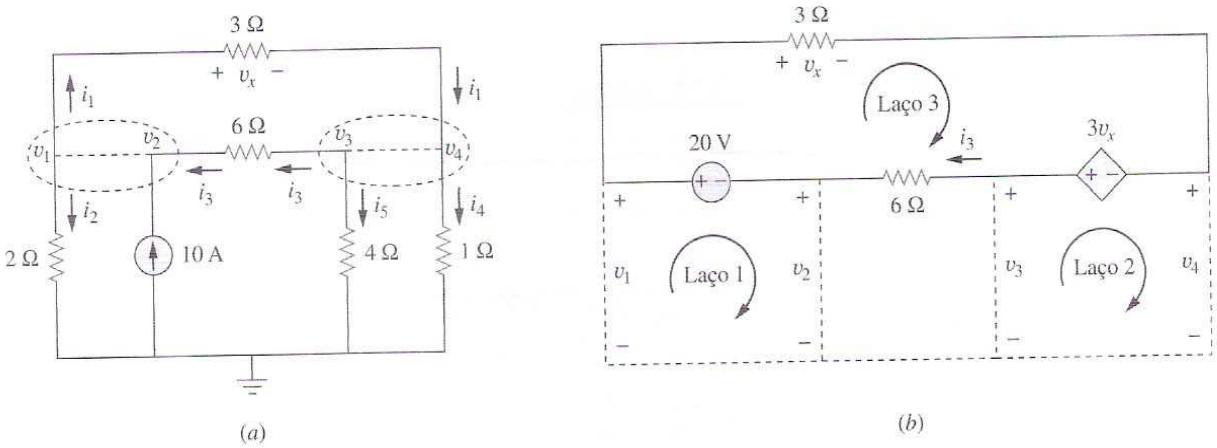


Figura 3.13 Aplicação da: (*a*) LKC aos dois supernós; (*b*) LKT aos laços.

Agora, aplicamos a LKT aos ramos envolvendo as fontes de tensão, conforme mostrado na Figura 3.13*b*. Para o laço 1,

$$-v_1 + 20 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 = 20 \tag{3.4.3}$$

Para o laço 2,

$$-v_3 + 3v_x + v_4 = 0$$

Porém $v_x = v_1 - v_4$ de modo que

$$3v_1 - v_3 - 2v_4 = 0 \tag{3.4.4}$$

Para o laço 3,

$$v_x - 3v_x + 6i_3 - 20 = 0$$

Porém $6i_3 = v_3 - v_2$ e $v_x = v_1 - v_4$ Logo,

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 20 \tag{3.4.5}$$

Precisamos de quatro tensões nodais, v_1, v_2, v_3 e v_4 e isso requer apenas quatro das cinco Equações (3.4.1) a (3.4.5) para encontrá-las. Embora a quinta equação seja redundante, ela pode ser usada para comprovar os resultados. Podemos resolver diretamente as Equações (3.4.1) a (3.4.4), usando o *MATLAB*, e eliminar uma tensão nodal de modo a resolver três equações simultâneas em vez de quatro. A partir da Equação (3.4.3), $v_2 = v_1 - 20$. Substituindo isso, respectivamente, nas Equações (3.4.1) e (3.4.2), temos

$$6v_1 - v_3 - 2v_4 = 80 \tag{3.4.6}$$

e

$$6v_1 - 5v_3 - 16v_4 = 40 \tag{3.4.7}$$

As Equações (3.4.4), (3.4.6) e (3.4.7) podem ser formuladas na forma matricial como segue

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Usando a regra de Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 80 & -1 & -2 \\ 40 & -5 & -16 \end{vmatrix} = -480,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 80 & -2 \\ 6 & 40 & -16 \end{vmatrix} = -3.120, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 80 \\ 6 & -5 & 40 \end{vmatrix} = 840$$

Consequentemente, chegamos a tensões nodais como

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-480}{-18} = 26{,}67 \text{ V}, \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3.120}{-18} = 173{,}33 \text{ V},$$

$$v_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{840}{-18} = -46{,}67 \text{ V}$$

e $v_2 = v_1 - 20 = 6{,}667$ V. Não usamos a Equação (3.4.5); ela pode ser usada para validar os resultados.

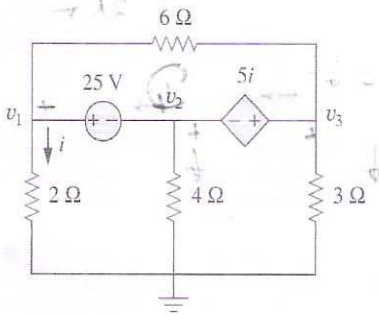


Figura 3.14 Esquema para o Problema prático 3.4.

PROBLEMA PRÁTICO 3.4

Determine v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura 3.14 usando análise nodal.

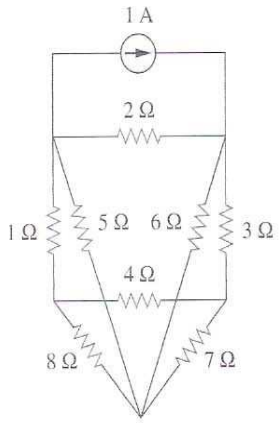
Resposta: $v_1 = 7{,}608$ V, $v_2 = -17{,}39$ V, $v_3 = 1{,}6305$ V.

3.4 Análise de malhas

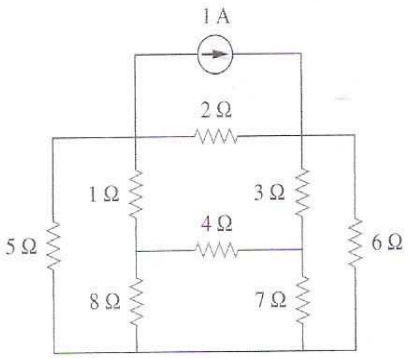
A análise de malhas fornece outra maneira para se verificarem circuitos usando as correntes de malha como variáveis de circuito, e usar essas correntes em vez de correntes de elementos como variáveis é conveniente e reduz o número de equações que devem ser resolvidas matematicamente. Lembre-se de que um laço é um caminho fechado que não passa mais de uma vez pelo mesmo nó. Uma malha é um laço que não contém qualquer outro laço dentro de si.

A análise de malhas também é conhecida como *análise de laço* ou *método malha corrente*.

A análise nodal aplica a LKC para encontrar tensões desconhecidas em dado circuito, enquanto a análise de malhas aplica a LKT para determinar correntes desconhecidas; esta não é tão genérica quanto a análise nodal, porque é aplicável apenas a um circuito que é *planar*, que pode ser desenhado em um plano sem nenhum ramo cruzado entre si; caso contrário, torna-se um circuito *não planar*. Um circuito pode ter ramos cruzados e ainda ser planar, se ele puder ser redesenhado de tal forma que não apresente mais nenhum ramo cruzando outro. Por exemplo, o circuito da Figura 3.15*a* tem dois ramos que se cruzam, porém ele pode ser redesenhado como na Figura 3.15*b*. Logo, o circuito da Figura 3.15*a* também é planar; entretanto, o circuito da Figura 3.16 é não planar, pois não há nenhuma maneira de redesenhá-lo sem que haja algum cruzamento entre ramos. Os circuitos não planares podem ser tratados usando-se análise nodal, contudo, eles não serão considerados neste texto.



(*a*)



(*b*)

Figura 3.15 (*a*) Circuito planar com cruzamento de ramos; (*b*) o mesmo circuito redesenhado para não ocorrer o cruzamento de ramos.

Embora o caminho *abcdefa* seja um laço e não uma malha, a LKT ainda vale nesse caso. Esta é a razão para o emprego, sem excesso de rigor, dos termos *análise de laços* e *análise de malhas*, para indicar a mesma coisa.

O sentido da corrente de malha é arbitrário (sentido horário ou anti-horário) e não afeta a validade da solução.

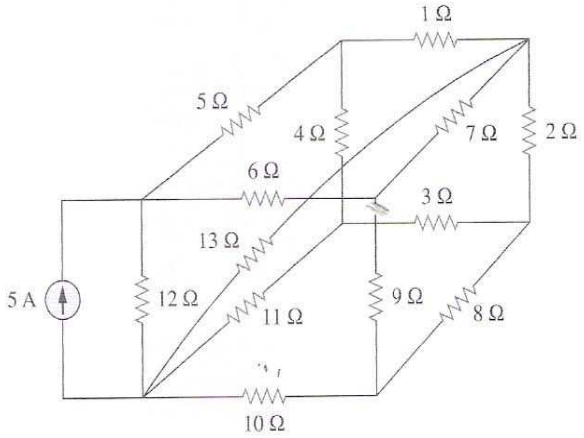


Figura 3.16 Circuito não planar.

Para compreender a análise de malhas, devemos, primeiro, explicar mais a respeito do significado de malha.

Malha é um laço que não contém nenhum outro laço em seu interior.

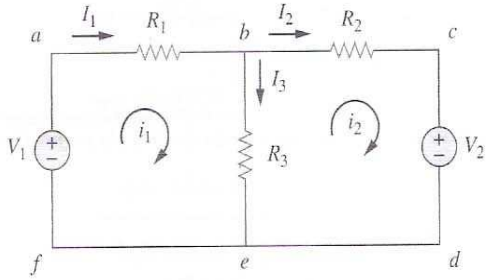


Figura 3.17 Um circuito com duas malhas.

Na Figura 3.17, por exemplo, os caminhos *abefa* e *bcdeb* são malhas, porém o trecho *abcdefa* não é uma malha. A corrente através de uma malha é conhecida como *corrente de malha*. Nessa análise, estamos interessados na aplicação da LKT para determinar as correntes de malha em dado circuito.

Nesta seção, vamos aplicar a análise de malhas a circuitos planares que não contêm fontes de corrente, e, nas próximas, consideraremos circuitos contendo fontes de corrente. Na análise de malhas de um circuito com n malhas, seguimos as etapas descritas.

Etapas na determinação de correntes de malha:

1. Atribua correntes de malha $i_1, i_2, \ldots, i_n$ a n malhas.
2. Aplique a LKT a cada uma das n malhas. Use a lei de Ohm para expressar as tensões em termos de correntes de malha.
3. Resolva as n equações simultâneas resultantes para obter as correntes de malha.

Para ilustrar as etapas citadas, consideremos o circuito da Figura 3.17. O primeiro passo requer que as correntes de malha i_1 e i_2 sejam atribuídas às malhas 1 e 2. Embora uma corrente de malha possa ser atribuída a cada malha em um sentido arbitrário, a convenção diz para supor que cada corrente de malha flua no sentido horário.

Como segundo passo, aplicamos a LKT a cada malha. Aplicando a LKT à malha 1, obtemos

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0$$

ou

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1 \tag{3.13}$$

Para a malha 2, aplicando a LKT, temos

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0$$

ou

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -V_2 \tag{3.14}$$

Note na Equação (3.13) que o coeficiente de i_1 é a soma das resistências na primeira malha, enquanto o coeficiente de i_2 é o negativo da resistência comum às malhas 1 e 2. Observe agora que o mesmo é válido na Equação (3.14). Isso pode servir como uma maneira reduzida de se escrever as equações de malha. Exploraremos esse conceito na Seção 3.6.

A forma simplificada não será aplicável se uma corrente de malha tiver seu sentido suposto como horário e outra for suposta no sentido anti-horário, embora isso seja permitido.

A terceira etapa é determinar as correntes de malha. Colocando as Equações (3.13) e (3.14) na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

que pode ser resolvida para obterem-se as correntes de malha i_1 e i_2. Temos a liberdade de usar qualquer técnica para solucionar as equações simultâneas. De acordo com a Equação (2.12), se um circuito possui n nós, b ramos e l laços ou malhas independentes, então $l = b - n + 1$. Portanto, são necessárias l equações simultâneas independentes para solucionar o circuito através da análise de malhas.

Note que as correntes de ramo são diferentes das de malha, a menos que a malha esteja isolada. Para distinguir entre os dois tipos de correntes, usaremos i para indicar correntes de malha e I para indicar correntes de ramo. Os elementos de corrente I_1, I_2 e I_3 são somas algébricas das correntes de malha. Fica evidente da Figura 3.17 que

$$I_1 = i_1, \qquad I_2 = i_2, \qquad I_3 = i_1 - i_2 \tag{3.16}$$

EXEMPLO 3.5

Para o circuito da Figura 3.18, determine as correntes de ramo I_1, I_2 e I_3 usando a análise de malhas.

Solução: Primeiro, obtemos as correntes de malha aplicando a LKT. Para a malha 1,

$$-15 + 5i_1 + 10(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

ou

$$3i_1 - 2i_2 = 1 \tag{3.5.1}$$

Para a malha 2,

$$6i_2 + 4i_2 + 10(i_2 - i_1) - 10 = 0$$

ou

$$i_1 = 2i_2 - 1 \tag{3.5.2}$$

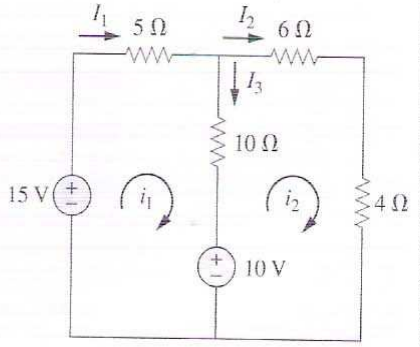


Figura 3.18 Esquema para o Exemplo 3.5.

■ **MÉTODO 1** Usando o método da substituição, substituímos a Equação (3.5.2) na Equação (3.5.1) e escrevemos

$$6i_2 - 3 - 2i_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 1\ \text{A}$$

A partir da Equação (3.5.2), $i_1 = 2i_2 - 1 = 2 - 1 = 1$. Consequentemente,

$$I_1 = i_1 = 1\ \text{A}, \quad I_2 = i_2 = 1\ \text{A}, \quad I_3 = i_1 - i_2 = 0$$

■ **MÉTODO 2** Para usar a regra de Cramer, formulamos as Equações (3.5.1) e (3.5.2) na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos os determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

Portanto,

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1\ \text{A}, \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1\ \text{A}$$

como antes.

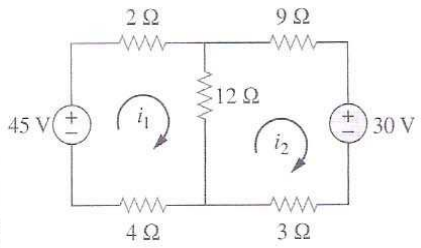


Figura 3.19 Esquema para o Problema prático 3.5.

PROBLEMA PRÁTICO 3.5

Calcule as correntes de malha i_1 e i_2 no circuito da Figura 3.19.

Resposta: $i_1 = 2{,}5$ A, $i_2 = 0$ A.

EXEMPLO 3.6

Use a análise de malhas para encontrar a corrente I_o no circuito da Figura 3.20.

Solução: Aplicamos a LKT às três malhas, uma de cada vez. Para a malha 1,

$$-24 + 10(i_1 - i_2) + 12(i_1 - i_3) = 0$$

ou

$$11i_1 - 5i_2 - 6i_3 = 12 \tag{3.6.1}$$

Para a malha 2,

$$24i_2 + 4(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) = 0$$

ou

$$-5i_1 + 19i_2 - 2i_3 = 0 \tag{3.6.2}$$

Para a malha 3,

$$4I_o + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

Porém, no nó A, $I_o = i_1 - i_2$, de modo que

$$4(i_1 - i_2) + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

ou

$$-i_1 - i_2 + 2i_3 = 0 \tag{3.6.3}$$

Na forma matricial, as Equações (3.6.1) a (3.6.3) ficam

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

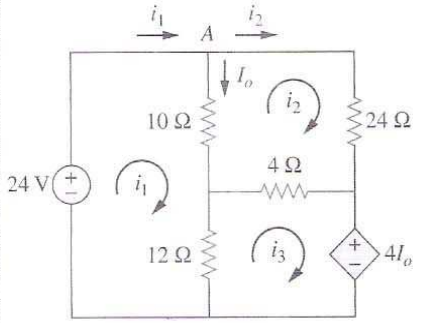


Figura 3.20 Esquema para o Exemplo 3.6.

Obtemos os determinantes como a seguir

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 418 - 30 - 10 - 114 - 22 - 50 = 192$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 456 - 24 = 432$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 120 = 144$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 60 + 228 = 288$$

Calculamos as correntes de malha usando a regra de Cramer, a seguir

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{432}{192} = 2{,}25 \text{ A}, \qquad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{192} = 0{,}75 \text{ A},$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{288}{192} = 1{,}5 \text{ A}$$

Portanto, $I_o = i_1 - i_2 = 1{,}5$ A.

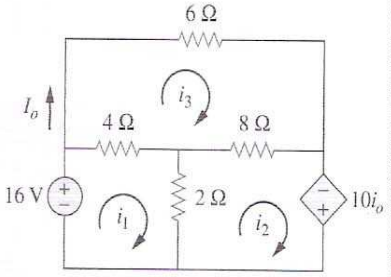


Figura 3.21 Esquema para o Problema prático 3.6.

Usando a análise de malhas, determine I_o no circuito da Figura 3.21.

Resposta: −4 A.

PROBLEMA PRÁTICO 3.6

3.5 Análise de malhas com fontes de corrente

Aplicar a análise de malhas a circuitos contendo fontes de corrente (dependentes ou independentes) pode, à primeira vista, parecer complicado. Porém, sua aplicação é muito mais fácil que aquela apresentada na seção anterior, pois a presença de fontes de corrente reduz o número de equações. Considere os dois casos possíveis a seguir.

■ **CASO 1** Quando existe uma fonte de corrente apenas em uma malha: considere, por exemplo, o circuito da Figura 3.22. Fazemos $i_2 = -5$ A e escrevemos uma equação de malha para a outra malha da maneira usual, isto é,

$$-10 + 4i_1 + 6(i_1 - i_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -2 \text{ A} \qquad (3.17)$$

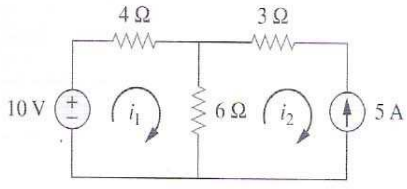


Figura 3.22 Circuito com fonte de corrente.

■ **CASO 2** Quando uma fonte de corrente existe entre duas malhas: considere o circuito da Figura 3.23*a*, por exemplo. Criamos uma *supermalha*, excluindo a fonte de corrente e quaisquer elementos a ela associados em série, como mostrado na Figura 3.23*b*. Logo,

> Uma **supermalha** é resultante quando duas malhas possuem uma fonte de corrente (dependente ou independente) em comum.

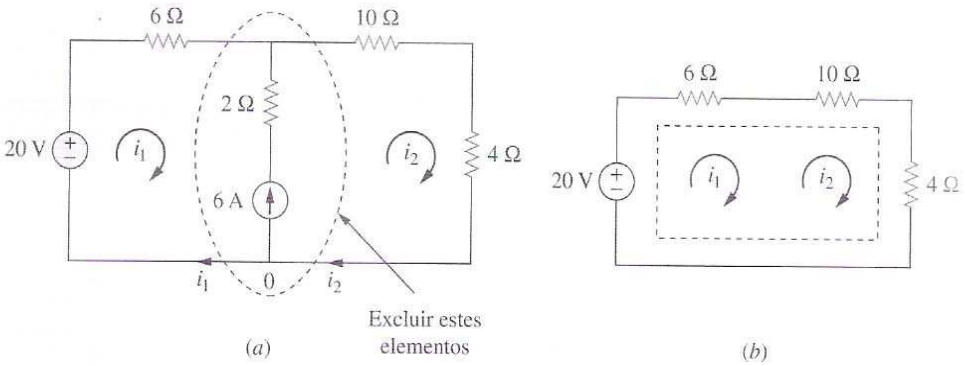


Figura 3.23 (*a*) Duas malhas com uma fonte de corrente em comum; (*b*) uma supermalha criada pela exclusão da fonte de corrente.

Como mostrado na Figura 3.23*b*, criamos uma supermalha como a periferia de duas malhas e a tratamos de forma diferente. (Se um circuito tiver duas ou mais supermalhas que se interceptam, elas devem ser combinadas para formar uma supermalha maior.) Por que tratá-la de forma diferente? Porque a análise de malhas aplica a LKT, que requer que saibamos a tensão em cada ramo, e não conhecemos a tensão em uma fonte de corrente de antemão. Porém, uma supermalha deve realizar a LKT como qualquer outra malha. Assim, aplicando a LKT à supermalha da Figura 3.23*b*, temos

$$-20 + 6i_1 + 10i_2 + 4i_2 = 0$$

ou

$$6i_1 + 14i_2 = 20 \tag{3.18}$$

Aplicamos a LKC a um nó no ramo no qual as duas malhas apresentam uma interseção. Aplicando a LKC ao nó 0 da Figura 3.23*a*, temos

$$i_2 = i_1 + 6 \tag{3.19}$$

Resolvendo as Equações (3.18) e (3.19), obtemos

$$i_1 = -3{,}2 \text{ A}, \qquad i_2 = 2{,}8 \text{ A}$$

Observe as seguintes propriedades de uma supermalha:

1. A fonte de corrente na supermalha fornece a equação de restrição necessária para encontrar as correntes de malha.
2. Uma supermalha não possui corrente própria.
3. Uma supermalha requer a aplicação da LKT, bem como da LKC.

EXEMPLO 3.7

Para o circuito da Figura 3.24, determine i_1 a i_4 usando a análise de malhas.

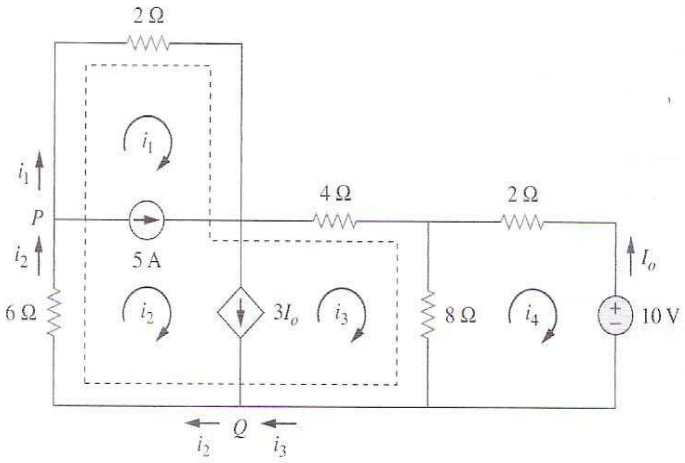


Figura 3.24 Esquema para o Exemplo 3.7.

Solução: Observe que as malhas 1 e 2 formam uma supermalha, já que possuem uma fonte de corrente em comum. Da mesma forma, as malhas 2 e 3 formam outra supermalha, uma vez que possuem uma fonte de corrente dependente em comum. As duas supermalhas se interceptam e formam uma supermalha maior conforme indicado. Aplicando a LKT à malha maior,

$$2i_1 + 4i_3 + 8(i_3 - i_4) + 6i_2 = 0$$

ou

$$i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 \qquad \textbf{(3.7.1)}$$

Para a fonte de corrente independente, aplicamos a LKC ao nó P:

$$i_2 = i_1 + 5 \qquad \textbf{(3.7.2)}$$

Para a fonte de corrente dependente, aplicamos a LKC ao nó Q:

$$i_2 = i_3 + 3I_o$$

Porém $i_o = -i_4$, logo,

$$i_2 = i_3 - 3i_4 \qquad \textbf{(3.7.3)}$$

Aplicando a LKT na malha 4,

$$2i_4 + 8(i_4 - i_3) + 10 = 0$$

ou

$$5i_4 - 4i_3 = -5 \qquad \textbf{(3.7.4)}$$

A partir das Equações (3.7.1) a (3.7.4),

$$i_1 = -7{,}5 \text{ A}, \quad i_2 = -2{,}5 \text{ A}, \quad i_3 = 3{,}93 \text{ A}, \quad i_4 = 2{,}143 \text{ A}$$

PROBLEMA PRÁTICO 3.7

Use a análise de malhas para determinar i_1, i_2 e i_3 na Figura 3.25.

Resposta: $i_1 = 4{,}632$ A, $i_2 = 631{,}6$ mA, $i_3 = 1{,}4736$ A.

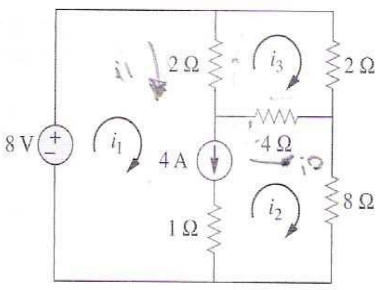


Figura 3.25 Esquema para o Problema prático 3.7.

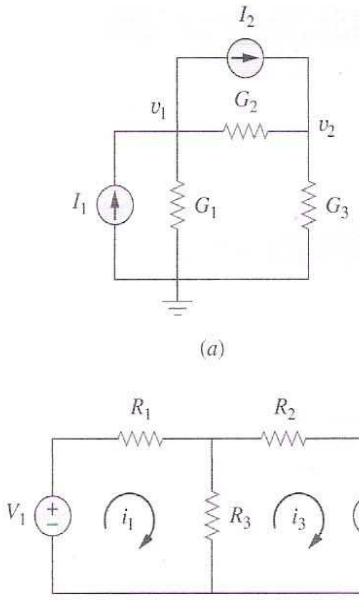


Figura 3.26 (*a*) O circuito da Figura 3.2; (*b*) o circuito da Figura 3.17.

3.6 †Análises nodal e de malhas por inspeção

Esta seção apresenta um procedimento genérico para análise nodal ou de malhas. Trata-se de um método mais curto que se baseia na inspeção de um circuito.

Quando todas as fontes em um circuito são fontes de corrente independentes, precisamos realmente aplicar a LKC a cada nó para obter as equações nó-tensão, conforme fizemos na Seção 3.2. Podemos ter as equações por mera inspeção do circuito. Reexaminemos, por exemplo, o circuito da Figura 3.2, mostrado novamente na Figura 3.26*a* por conveniência. O circuito possui dois nós que não são de referência, e as equações nodais foram obtidas na Seção 3.2 como segue

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Observe que cada um dos termos da diagonal é a soma das condutâncias conectadas diretamente ao nó 1 ou 2, enquanto os termos fora da diagonal são os negativos das condutâncias conectados entre os nós. Da mesma forma, cada termo do lado direito da Equação (3.21) é a soma algébrica das correntes que entram pelo nó.

Geralmente, se um circuito com fontes de corrente independentes tiver N nós que não são de referência, as equações nó-tensão podem ser escritas em termos das condutâncias como

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

ou simplesmente

$$\mathbf{Gv} = \mathbf{i} \tag{3.23}$$

onde

G_{kk} = Soma das condutâncias conectadas ao nó k.

$G_{kj} = G_{jk}$ = Negativo da soma das condutâncias diretamente conectadas aos nós k e j, $k \neq j$.

v_k = Tensão (desconhecida) no nó k.

i_k = Soma de todas as fontes de corrente independentes diretamente conectadas ao nó k, com correntes que entram no nó sendo tratadas como positivas.

G é a chamada *matriz de condutância*; **v** é o vetor de saída e **i** é o vetor de entrada. A Equação (3.22) pode ser resolvida para obter as tensões nodais desconhecidas, e isso é válido para circuitos com apenas fontes de corrente independentes e resistores lineares.

Igualmente, podemos obter equações malha-corrente por inspeção quando um circuito resistivo linear tiver apenas fontes de tensão independentes. Considere que o circuito da Figura 3.17, mostrado novamente na Figura 3.26*b* por conveniência, possui dois nós que não são de referência e as equações nodais foram deduzidas na Seção 3.4 como

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Podemos observar que cada um dos termos na diagonal é a soma das resistências na respectiva malha, enquanto cada um dos termos fora da diagonal é o negativo da resistência comum às malhas 1 e 2. Cada termo do lado direito da Equação (3.24) é a soma algébrica obtida no sentido horário de todas as fontes de tensão independentes na respectiva malha.

Em geral, se o circuito tiver N malhas, as equações malha-corrente poderão ser expressas em termos de resistências como

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

ou simplesmente

$$\mathbf{Ri} = \mathbf{v} \tag{3.26}$$

onde

R_{kk} = Soma das resistências na malha k.

$R_{kj} = R_{jk}$ = Negativo da soma das resistências em comum entre as malhas k e j, $k \neq j$.

i_k = Corrente de malha (desconhecida) para a malha k no sentido horário.

v_k = Soma de todas as fontes de tensão independentes na malha k, com a elevação de tensão sendo tratada como positiva.

R é a chamada *matriz de resistência*; **i** é o vetor de saída e **v** é o vetor de entrada. Podemos solucionar a Equação (3.25) para obtermos as correntes de malha desconhecidas.

EXEMPLO 3.8

Por inspeção, escreva a matriz das equações nó-tensão para o circuito da Figura 3.27.

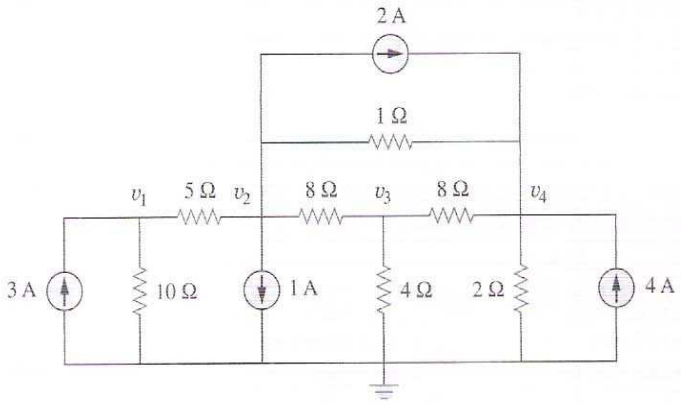


Figura 3.27 Esquema para o Exemplo 3.8.

Solução: O circuito da Figura 3.27 possui quatro nós que não são de referência, de modo que precisamos de quatro equações de nós. Isso implica que o tamanho da matriz de condutância **G** é uma matriz 4 por 4. Os termos da diagonal de **G**, em siemens, são:

$$G_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0{,}3, \qquad G_{22} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1} = 1{,}325$$

$$G_{33} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 0{,}5, \qquad G_{44} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1{,}625$$

Os termos que se encontram fora da diagonal são:

$$G_{12} = -\frac{1}{5} = -0{,}2, \qquad G_{13} = G_{14} = 0$$

$$G_{21} = -0{,}2, \qquad G_{23} = -\frac{1}{8} = -0{,}125, \qquad G_{24} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$G_{31} = 0, \qquad G_{32} = -0{,}125, \qquad G_{34} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

$$G_{41} = 0, \qquad G_{42} = -1, \qquad G_{43} = -0{,}125$$

O vetor de corrente de entrada **i** possui os seguintes termos, em ampères:

$$i_1 = 3, \qquad i_2 = -1 - 2 = -3, \qquad i_3 = 0, \qquad i_4 = 2 + 4 = 6$$

Portanto, as equações de tensão nodal são:

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1{,}325 & -0{,}125 & -1 \\ 0 & -0{,}125 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & -1 & -0{,}125 & 1{,}625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

que podem ser resolvidas usando o *MATLAB* para obter as tensões nodais v_1, v_2, v_3 e v_4.

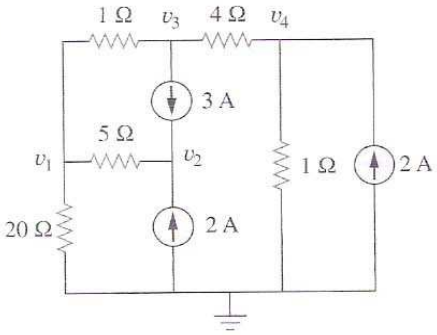


Figura 3.28 Esquema para o Problema prático 3.8.

PROBLEMA PRÁTICO 3.8

Por inspeção, obtenha as equações nó-tensão para o circuito da Figura 3.28.

Resposta:
$$\begin{bmatrix} 1{,}25 & -0{,}2 & -1 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1{,}25 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -0{,}25 & 1{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 3.9

Por inspeção, escreva as equações de correntes de malha para o circuito da Figura 3.29.

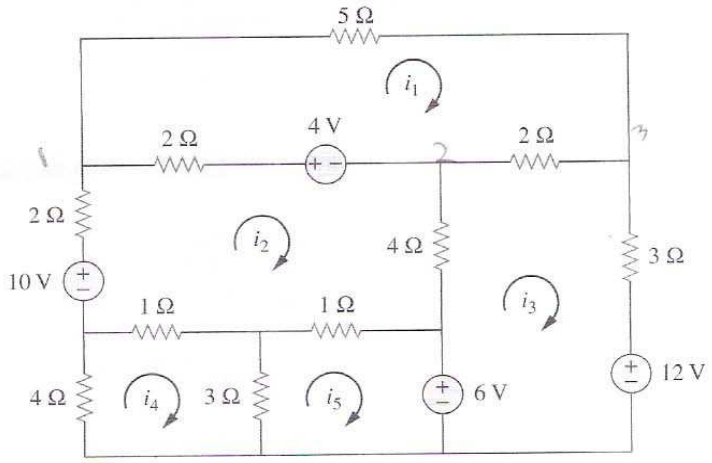


Figura 3.29 Esquema para o Exemplo 3.9.

Solução: Temos cinco malhas, portanto, a matriz de resistências é 5 por 5. Os termos da diagonal, em ohms, são:

$$R_{11} = 5 + 2 + 2 = 9, \qquad R_{22} = 2 + 4 + 1 + 1 + 2 = 10,$$
$$R_{33} = 2 + 3 + 4 = 9, \qquad R_{44} = 1 + 3 + 4 = 8, \qquad R_{55} = 1 + 3 = 4$$

Os termos fora da diagonal são:

$$R_{12} = -2, \qquad R_{13} = -2, \qquad R_{14} = 0 = R_{15},$$
$$R_{21} = -2, \qquad R_{23} = -4, \qquad R_{24} = -1, \qquad R_{25} = -1,$$
$$R_{31} = -2, \qquad R_{32} = -4, \qquad R_{34} = 0 = R_{35},$$
$$R_{41} = 0, \qquad R_{42} = -1, \qquad R_{43} = 0, \qquad R_{45} = -3,$$
$$R_{51} = 0, \qquad R_{52} = -1, \qquad R_{53} = 0, \qquad R_{54} = -3$$

O vetor de tensões de entrada v tem os seguintes termos em volts:

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 10 - 4 = 6,$$
$$v_3 = -12 + 6 = -6, \quad v_4 = 0, \quad v_5 = -6$$

Portanto, as equações de corrente de malha são:

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A partir destas, podemos usar o *MATLAB* para obter as correntes de malha i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5.

Por inspeção, obtenha as equações de corrente de malha para o circuito da Figura 3.30.

PROBLEMA PRÁTICO 3.9

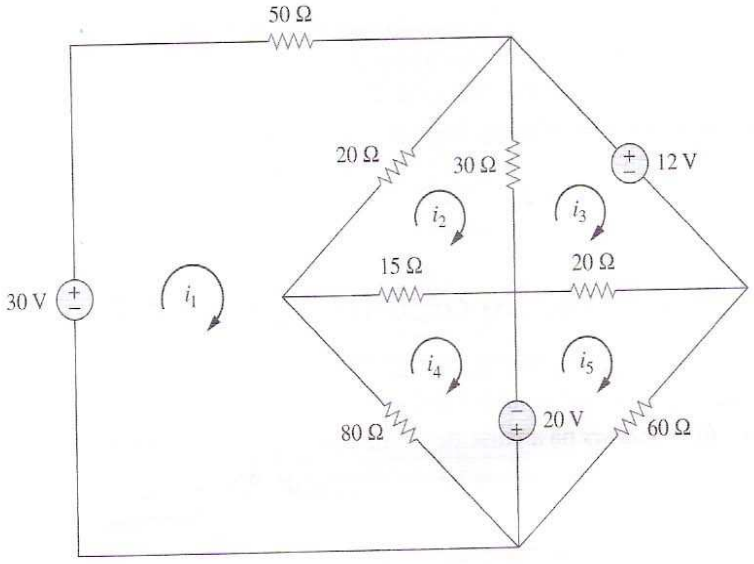


Figura 3.30 Esquema para o Problema prático 3.9.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} 150 & -40 & 0 & -80 & 0 \\ -40 & 65 & -30 & -15 & 0 \\ 0 & -30 & 50 & 0 & -20 \\ -80 & -15 & 0 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -12 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

3.7 Análise nodal *versus* análise de malhas

Tanto a análise nodal como a análise de malhas fornecem uma maneira sistemática para analisar uma rede complexa. Alguém poderia perguntar: dada uma rede a ser analisada, como saber qual método é melhor ou mais eficiente? A escolha do melhor método é ditada por dois fatores.

O primeiro fator é a natureza da rede em particular. As redes que contêm muitos elementos conectados em série, fontes de tensão ou supermalhas são mais adequadas para análise de malhas, enquanto as redes com elementos associados em paralelo, fontes de corrente ou supernós são mais adequadas para análise nodal. Sendo assim, um circuito com um número menor de nós que o de malhas é mais bem analisado usando-se a análise nodal, enquanto um circuito com um número menor de malhas que o de nós é mais bem avaliado

utilizando-se análise de malhas. O segredo é selecionar o método que resulta no menor número de equações.

O segundo fator são as informações necessárias. Se as tensões nodais forem imprescindíveis, pode ser conveniente aplicar a análise nodal. Se forem necessárias correntes de ramo ou de malha, é melhor empregar a análise de malhas.

É bom estar familiarizado com ambos os métodos de análise devido a, pelo menos, duas razões. Primeiro, se possível, pode-se usar um dos métodos para verificar os resultados de outro método. Em segundo lugar, já que cada método tem suas limitações, talvez apenas um método seja adequado para um problema em particular. Por exemplo, a análise de malhas é o único método a ser empregado para análise de circuitos transistorizados, conforme veremos na Seção 3.9, porém, ela não pode ser usada facilmente para resolver um circuito com amplificadores operacionais, conforme veremos no Capítulo 5, porque não existe uma maneira direta de se obter a tensão no amplificador operacional em si. Para redes não planares, a análise nodal é a única opção, pois a análise de malhas se aplica apenas a redes planares. Da mesma forma, a análise nodal é mais fácil de se resolver via computador, já que é fácil de ser programada. Isso permite analisar circuitos complexos que seriam um desafio para o cálculo manual. A seguir, apresentaremos um pacote de *software* baseado em análise nodal

3.8 Análise de circuitos usando o *PSpice*

PSpice é um programa para análise de circuitos via computador cuja utilização aprenderemos gradualmente ao longo do livro. Esta seção ilustra como usar o *PSpice for Windows* na análise de circuitos CC que estudamos até então.

Espera-se que o leitor estude, no tutorial do *PSpice* disponível em nosso *site* (www.grupoa.com.br), os tópicos sobre a criação de circuitos e a análise CC, antes de prosseguir nesta seção. Deve-se observar que o *PSpice* é útil apenas para determinar correntes e tensões de ramo quando os valores numéricos de todos os componentes do circuito são conhecidos.

EXEMPLO 3.10

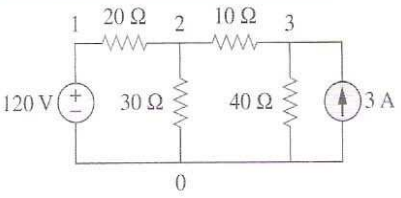


Figura 3.31 Esquema para o Exemplo 3.10.

Use o *PSpice* para determinar as tensões nodais no circuito da Figura 3.31.

Solução: O primeiro passo é desenhar o circuito dado usando a ferramenta Schematics. Se forem seguidas as instruções fornecidas no tutorial (*site*) sobre criação de circuitos e análise CC, será gerado o esquema da Figura 3.32. Uma vez que se trata de uma análise CC, usamos a fonte de tensão VDC e a fonte de corrente IDC. Os pseudocomponentes VIEWPOINTS são acrescentados para mostrar as tensões nodais necessárias.

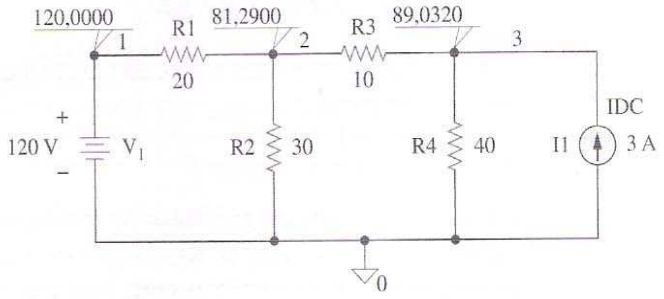


Figura 3.32 Esquema para o Exemplo 3.10; o esquema do circuito na Figura 3.31.

Assim que o circuito for desenhado e salvo como *exam310.sch*, executamos o *PSpice* selecionando **Analisys/Simulate**. O circuito é simulado e os resultados são exibidos em

VIEWPOINTS e também salvos no arquivo de saída *exam310.out*. O arquivo de saída inclui o seguinte:

```
NODE  VOLTAGE   NODE  VOLTAGE   NODE  VOLTAGE
(1)   120.0000  (2)   81.2900   (3)   89.0320
```

indicando que $V_1 = 120$ V, $V_2 = 81{,}29$ V, $V_3 = 89{,}032$ V.

PROBLEMA PRÁTICO 3.10

Para o circuito da Figura 3.33, use o *PSpice* para determinar as tensões nodais.

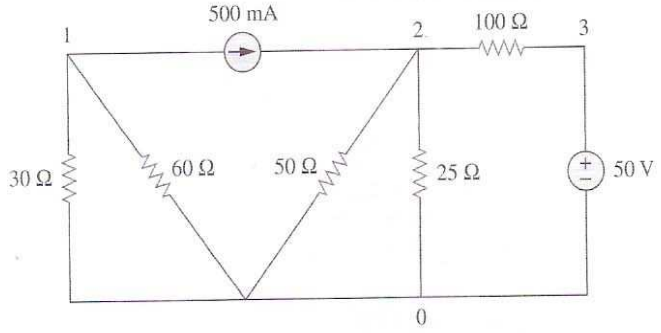


Figura 3.33 Esquema para o Problema prático 3.10.

Resposta: $V_1 = -10$ V, $V_s = 14{,}286$ V, $V_3 = 50$ V.

EXEMPLO 3.11

No circuito da Figura 3.34, determine as correntes i_1, i_2 e i_3.

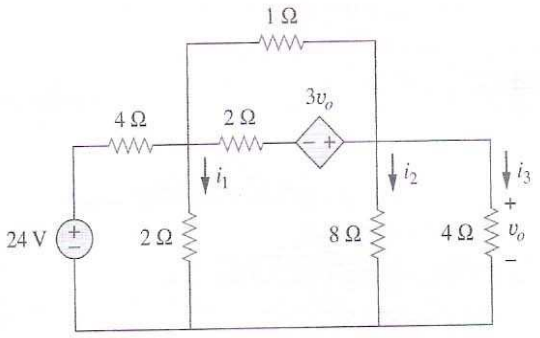


Figura 3.34 Esquema para o Exemplo 3.11.

Solução: O esquema é mostrado na Figura 3.35. (O esquema da Figura 3.35 inclui os resultados obtidos implicando que ele é o esquema exibido na tela *após* a simulação.) Note que E1 (uma fonte de tensão controlada por tensão), indicada na Figura 3.35, está

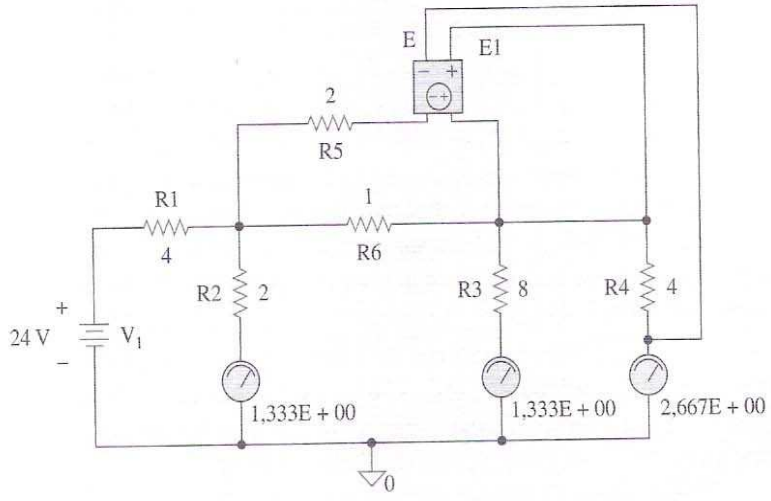


Figura 3.35 Esquema para a Figura 3.34.

conectada de tal forma que sua entrada é a tensão no resistor de 4 Ω; seu ganho é fixado em 3. De modo a poder mostrar as correntes necessárias, inserimos pseudocomponentes IPROBES nos ramos apropriados. O esquema é salvo como *exam311.sch* e simulado selecionando-se **Analysis/Simulate**. Os resultados são visualizados em IPROBES, conforme mostra a Figura 3.35 e salvo no arquivo de saída *exam311.out*. Do arquivo de saída ou IPROBES, obtemos $i_1 = i_2 = 1{,}333$ A e $i_3 = 2{,}667$ A.

PROBLEMA PRÁTICO 3.11

Use o *PSpice* para determinar as correntes i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura 3.36.

Resposta: $i_1 = -428{,}6$ mA, $i_2 = 2{,}286$ A, $i_3 = 2$ A.

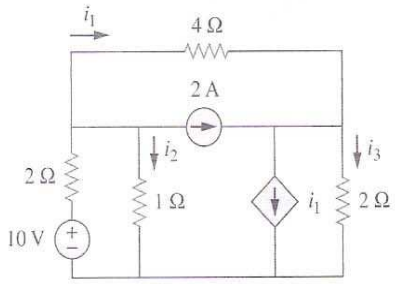


Figura 3.36 Esquema para o Problema prático 3.11.

3.9 †Aplicações: circuitos CC transistorizados

A maioria de nós lida rotineiramente com produtos eletrônicos e tem certa experiência com computadores (PCs). O dispositivo ativo de três terminais, conhecido como *transistor*, é um componente básico para os circuitos integrados encontrado nesses produtos. Entender o funcionamento de um transistor é essencial antes de um engenheiro poder começar a projetar circuitos eletrônicos.

A Figura 3.37 representa vários tipos de transistores disponíveis no mercado, e há dois tipos básicos: *transistores de junção bipolar* (BJTs) e *transistores de efeito de campo* (FETs). Dos dois, consideraremos aqui apenas os BJTs, que foram os primeiros a ser introduzidos e ainda são usados. Nosso objetivo é apresentar detalhes suficientes sobre o BJT, permitindo o uso das técnicas apresentadas neste capítulo, a fim de analisar circuitos CC transistorizados.

Cortesia da Lucent Technologies/Bell Labs.

PERFIS HISTÓRICOS

William Shockley (1910-1989), **John Bardeen** (1908-1991) e **Walter Brattain** (1902-1987) inventaram em conjunto o transistor.

Nada teve tal impacto sobre a transição da "Era Industrial" para a "Era do Engenheiro" que o transistor. Tenho certeza de que os doutores Shockley, Bardeen e Brattain não tinham a mínima ideia de que eles teriam tal efeito sobre nossa história. Quando ainda trabalhavam no Bell Laboratories, foram capazes de demonstrar o transistor de ponto de contato, inventado por Bardeen e Brattain, em 1947, e o transistor de junção, que Shockley concebeu em 1948, e foram bem-sucedidos em sua produção em 1951.

É interessante notar que o conceito de transistor de efeito de campo, de modo geral usado hoje, foi concebido inicialmente em 1925-1928 por J. E. Lilienfeld, imigrante alemão nos Estados Unidos. Esse fato fica evidenciado pelas suas patentes do que parece ser um transistor de efeito de campo. Infelizmente, a tecnologia para concretizar esse dispositivo teve de aguardar até o ano de 1954, quando o transistor de efeito de campo de Shockley se tornou uma realidade. Imagine o que seria atualmente se tivéssemos esse transistor 30 anos antes!

Por suas contribuições para a criação do transistor, os doutores Shockley, Bardeen e Brattain receberam, em 1956, o Prêmio Nobel de Física. Deve-se notar que Bardeen foi o único a ganhar dois Prêmios Nobel de Física; o segundo veio posteriormente por seu trabalho no campo da supercondutividade na Universidade de Illinois.

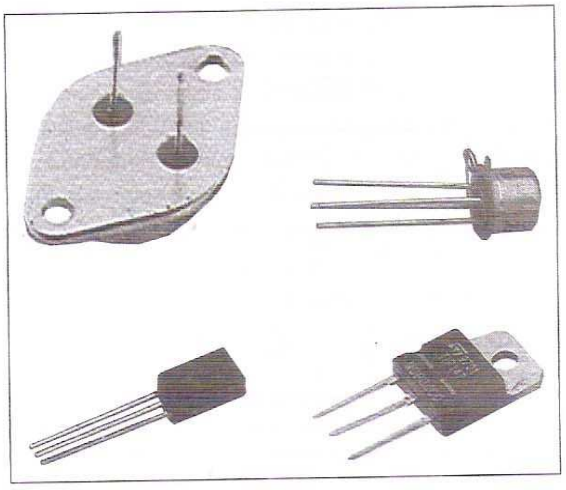


Figura 3.37 Vários tipos de transistores. (*Cortesia da Tech America.*)

Há dois tipos de BJTs: *npn* e *pnp*, e seus símbolos de circuito são apresentados na Figura 3.38. Cada tipo tem três terminais denominados emissor (E), base (B) e coletor (C). Para o transistor *npn*, as correntes e tensões do transistor são especificadas, conforme indicado na Figura 3.39. Aplicando a LKC à Figura 3.39*a*, obtemos

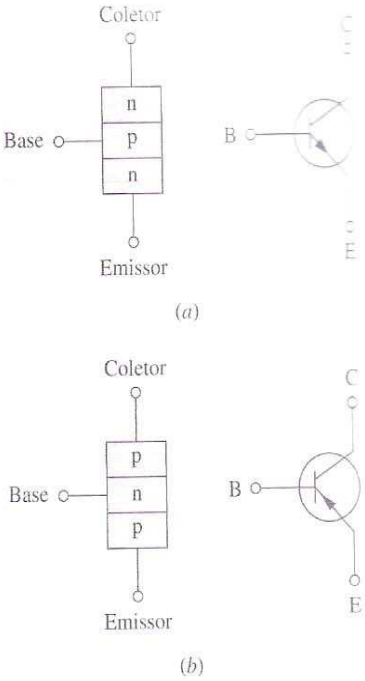


Figura 3.38 Dois tipos de BJTs e seus símbolos: (*a*) *npn*; (*b*) *pnp*.

$$\boxed{I_E = I_B + I_C} \tag{3.27}$$

onde I_E, I_C e I_B são, respectivamente, as correntes de emissor, de coletor e de base. Da mesma forma, aplicando a LKT à Figura 3.39*b*, obtemos

$$V_{CE} + V_{EB} + V_{BC} = 0 \tag{3.28}$$

onde V_{CE}, V_{EB} e V_{BC} são, respectivamente, as tensões coletor-emissor, emissor-base e base-coletor. O BJT pode operar em um de três modos: ativo, corte e saturação. Quando os transistores operam no modo ativo, normalmente $V_{BE} \simeq 0{,}7$ V,

$$I_C = \alpha I_E \tag{3.29}$$

onde α é o chamado *ganho de corrente em base comum*. Na Equação (3.29), α representa a fração de elétrons injetada pelo emissor que é coletada pelo coletor. Da mesma maneira,

$$\boxed{I_C = \beta I_B} \tag{3.30}$$

onde β é conhecido como *ganho de corrente em emissor comum*, e α e β são propriedades características de um determinado transistor, para o qual adotam valores constantes. Normalmente, α assume valores no intervalo de 0,98 a 0,999, enquanto β assume valores na faixa de 50 a 1.000. Das Equações (3.27) a (3.30), fica evidente que

$$I_E = (1 + \beta) I_B \tag{3.31}$$

e

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \tag{3.32}$$

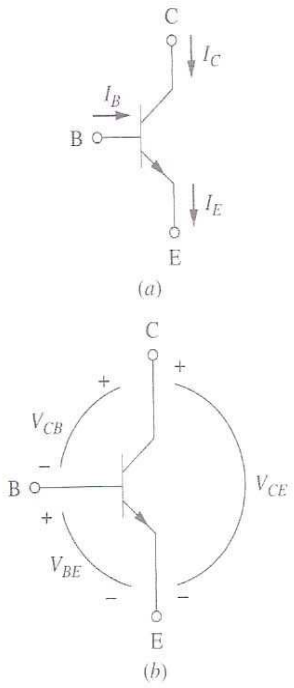


Figura 3.39 As variáveis ao longo dos terminais de um transistor *npn*: (*a*) correntes; (*b*) tensões.

Na realidade, os circuitos transistorizados fornecem motivação para o estudo de fontes dependentes.

Essas equações mostram que, no modo ativo, o BJT pode ser modelado com uma fonte de corrente dependente controlada por corrente. Portanto, em análise de circuitos, o modelo CC equivalente na Figura 3.40*b* pode ser usado para substituir o transistor *npn* da Figura 3.40*a*. Já que β na Equação (3.32) é grande, uma corrente de base pequena controla altas correntes no circuito de saída, consequentemente, o transistor bipolar pode servir como amplificador gerando ganho de corrente, bem como ganho de tensão. Tais amplificadores podem ser usados para fornecer um nível de alimentação a transdutores, como alto-falantes ou motores de controle.

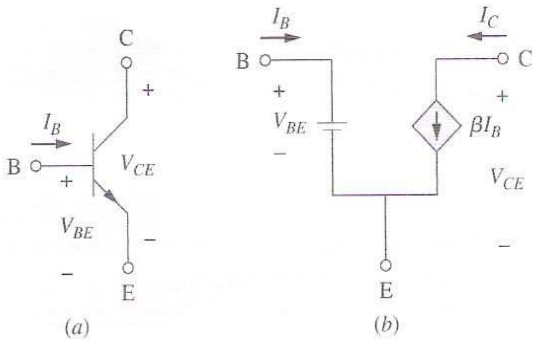


Figura 3.40 (*a*) Um transistor *npn*; (*b*) seu modelo CC equivalente.

Devemos observar que, nos exemplos a seguir, não se pode analisar diretamente circuitos transistorizados pela análise nodal em virtude da diferença de potencial entre os terminais do transistor. Somente quando o transistor é substituído por seu modelo equivalente é que podemos aplicar a análise nodal.

EXEMPLO 3.12

Determine I_B, I_C e v_o no circuito transistorizado da Figura 3.41. Considere que o transistor opera no modo ativo e que $\beta = 50$.

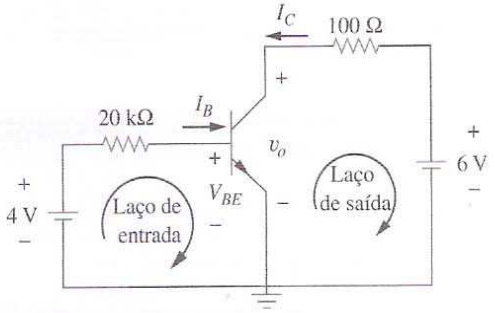


Figura 3.41 Esquema para o Exemplo 3.12.

Solução: Para o laço de entrada, a LKT fornece o seguinte

$$-4 + I_B(20 \times 10^3) + V_{BE} = 0$$

Uma vez que $V_{BE} = 0{,}7$ V no modo ativo,

$$I_B = \frac{4 - 0{,}7}{20 \times 10^3} = 165\ \mu\text{A}$$

Porém

$$I_C = \beta I_B = 50 \times 165\ \mu\text{A} = 8{,}25\ \text{mA}$$

Para o laço de saída, a LKT fornece o seguinte

$$-v_o - 100I_C + 6 = 0$$

ou

$$v_o = 6 - 100I_C = 6 - 0{,}825 = 5{,}175\ \text{V}$$

Note que $v_o = V_{CE}$ nesse caso.

PROBLEMA PRÁTICO 3.12

Para o circuito transistorizado da Figura 3.42, seja $\beta = 100$ e $V_{BE} = 0{,}7$ V. Determine v_o e V_{CE}.

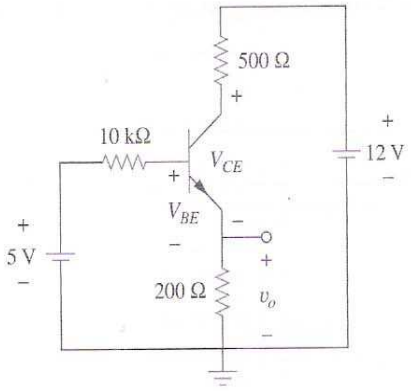


Figura 3.42 Esquema para o Problema prático 3.12.

Resposta: 2,876 V, 1,984 V.

EXEMPLO 3.13

Para o circuito BJT da Figura 3.43, $\beta = 150$ e $V_{BE} = 0{,}7$ V. Determine v_o.

Solução:

1. ***Definição.*** O circuito está claramente definido e o problema enunciado igualmente. Parece não haver nenhuma questão adicional a ser feita.
2. ***Apresentação.*** Devemos determinar a tensão de saída do circuito mostrado na Figura 3.43. O circuito contém um transistor ideal com $\beta = 150$ e $V_{BE} = 0{,}7$ V.
3. ***Alternativa.*** Podemos usar a análise de malhas para determinar v_o. Podemos substituir o transistor por seu circuito equivalente e usar análise nodal. Podemos tentar ambas as abordagens e usá-las para verificação do resultado obtido em cada uma delas. Como terceira verificação, podemos usar o circuito equivalente e resolvê-lo usando o *PSpice*.
4. ***Tentativa.***

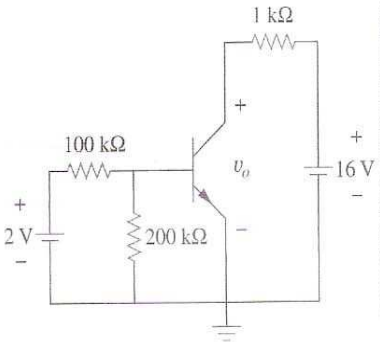


Figura 3.43 Esquema para o Exemplo 3.13.

■ **MÉTODO 1** Usando a Figura 3.44*a*, iniciamos com o primeiro laço.

$$-2 + 100\text{k}I_1 + 200\text{k}(I_1 - I_2) = 0 \quad \text{ou} \quad 3I_1 - 2I_2 = 2 \times 10^{-5} \qquad \textbf{(3.13.1)}$$

Para o laço 2,

$$200\text{k}(I_2 - I_1) + V_{BE} = 0 \quad \text{ou} \quad -2I_1 + 2I_2 = -0{,}7 \times 10^{-5} \qquad \textbf{(3.13.2)}$$

Como temos duas equações e duas incógnitas, podemos determinar I_1 e I_2. Somando a Equação (3.13.1) à Equação (3.13.2), obtemos:

$$I_1 = 1{,}3 \times 10^{-5}\text{A} \quad \text{e} \quad I_2 = (-0{,}7 + 2{,}6)10^{-5}/2 = 9{,}5\ \mu\text{A}$$

Uma vez que $I_3 = -150\ I_2 = -1{,}425$ mA, podemos agora achar v_o usando o laço 3:

$$-v_o + {}^1\text{k}I_3 + 16 = 0 \quad \text{ou} \quad v_o = -1{,}425 + 16 = \mathbf{14{,}575\ V}$$

■ **MÉTODO 2** A substituição do transistor por seu circuito equivalente produz o circuito mostrado na Figura 3.44*b*. Agora, podemos usar análise nodal para encontrar v_o.

No nó número 1: $V_1 = 0{,}7$ V.

$$(0{,}7 - 2)/100\text{k} + 0{,}7/200\text{k} + I_B = 0 \quad \text{ou} \quad I_B = 9{,}5\ \mu\text{A}$$

No nó número 2, temos:

$$150I_B + (v_o - 16)/1\text{k} = 0 \quad \text{ou}$$
$$v_o = 16 - 150 \times 10^3 \times 9{,}5 \times 10^{-6} = \mathbf{14{,}575\ V}$$

5. ***Avaliação.*** As respostas conferem, entretanto, para verificar mais uma vez, podemos usar o *PSpice* (Método 3), que nos fornece a solução apresentada na Figura 3.44*c*.
6. ***Satisfatório?*** Certamente obtivemos a resposta desejada com alto grau de confiabilidade. Agora, podemos apresentar nosso trabalho como uma solução ao problema.

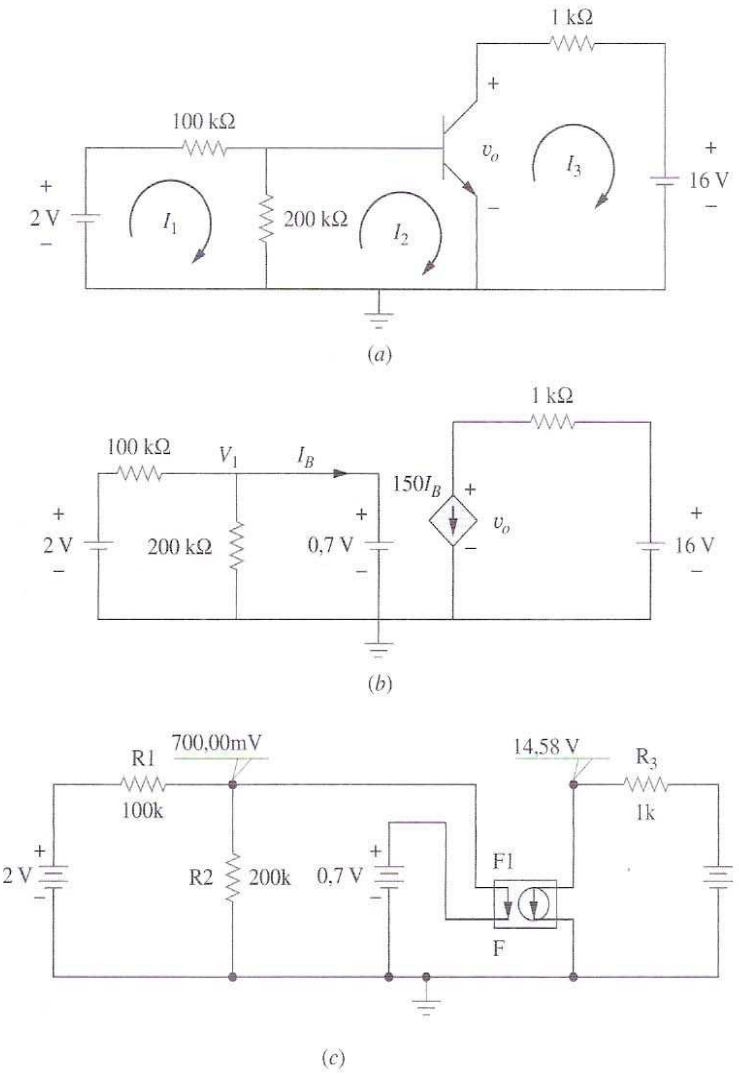


Figura 3.44 Solução do problema no Exemplo 3.13: (*a*) Método 1; (*b*) Método 2; (*c*) Método 3.

PROBLEMA PRÁTICO 3.13

O circuito transistorizado da Figura 3.45 tem $\beta = 80$ e $V_{BE} = 0{,}7$ V. Determine v_o e I_o.

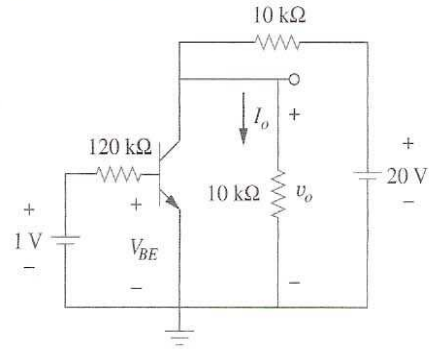


Figura 3.45 Esquema para o Problema prático 3.13.

Resposta: 12 V, 600 μA.

3.10 Resumo

1. A análise nodal é a aplicação da lei de Kirchhoff para corrente aos nós de referência. (Ela é aplicável tanto a circuitos planares como a não planares.) Expressamos o resultado em termos das tensões nodais. Resolver as equações simultâneas nos leva às tensões nodais.
2. Um supernó é formado por dois nós que não são de referência conectados por uma fonte de tensão (dependente ou independente).
3. A análise de malhas é a aplicação da lei de Kirchhoff para tensão às malhas em um circuito planar. Expressamos o resultado em termos de correntes de malha. Resolver as equações simultâneas nos leva a essas correntes.
4. Uma supermalha é formada por duas malhas que possuem uma fonte de corrente (dependente ou independente) comum.
5. Em geral, a análise nodal é usada quando um circuito tem um número de equações nodais menor que de equações de malhas. Normalmente, a análise de malhas é utilizada quando um circuito tem um número de equações de malhas menor que de equações nodais.
6. A análise de circuitos pode ser realizada usando o *PSpice*.
7. Os circuitos CC transistorizados podem ser analisados empregando as técnicas vistas neste capítulo.

Questões para revisão

3.1 No nó 1 no circuito da Figura 3.46, aplicando a LKC, obtemos:

(a) $2 + \dfrac{12 - v_1}{3} = \dfrac{v_1}{6} + \dfrac{v_1 - v_2}{4}$

(b) $2 + \dfrac{v_1 - 12}{3} = \dfrac{v_1}{6} + \dfrac{v_2 - v_1}{4}$

(c) $2 + \dfrac{12 - v_1}{3} = \dfrac{0 - v_1}{6} + \dfrac{v_1 - v_2}{4}$

(d) $2 + \dfrac{v_1 - 12}{3} = \dfrac{0 - v_1}{6} + \dfrac{v_2 - v_1}{4}$

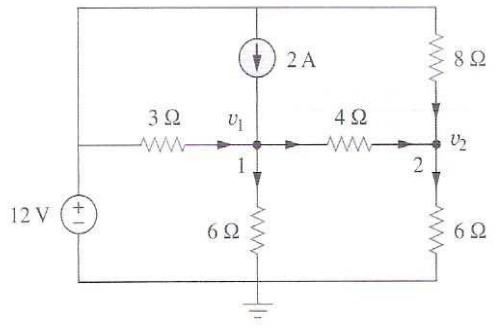


Figura 3.46 Esquema para as Questões para revisão 3.1 e 3.2.

3.2 No circuito da Figura 3.46, aplicando a LKC ao nó 2, temos:

(a) $\dfrac{v_2 - v_1}{4} + \dfrac{v_2}{8} = \dfrac{v_2}{6}$

(b) $\dfrac{v_1 - v_2}{4} + \dfrac{v_2}{8} = \dfrac{v_2}{6}$

(c) $\dfrac{v_1 - v_2}{4} + \dfrac{12 - v_2}{8} = \dfrac{v_2}{6}$

(d) $\dfrac{v_2 - v_1}{4} + \dfrac{v_2 - 12}{8} = \dfrac{v_2}{6}$

3.3 Para o circuito da Figura 3.47, v_1 e v_2 se relacionam segundo:

(a) $v_1 = 6i + 8 + v_2$ (b) $v_1 = 6i - 8 + v_2$

(c) $v_1 = -6i + 8 + v_2$ (d) $v_1 = -6i - 8 + v_2$

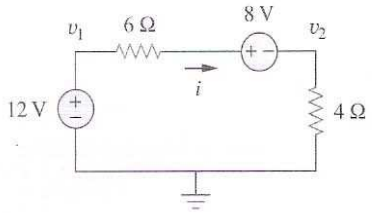


Figura 3.47 Esquema para as Questões para revisão 3.3 e 3.4.

3.4 No circuito da Figura 3.47, a tensão v_2 é:

(a) −8 V (b) −1,6 V

(c) 1,6 V (d) 8 V

3.5 A corrente i no circuito da Figura 3.48 é:

(a) −2,667 A

(b) −0,667 A

(c) 0,667 A

(d) 2,667 A

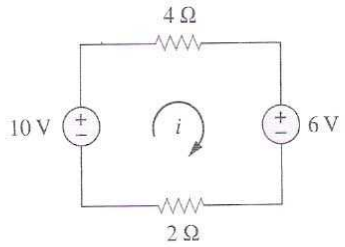


Figura 3.48 Esquema para as Questões para revisão 3.5 e 3.6.

3.6 A equação dos laços para o circuito da Figura 3.48 é:

(a) $-10 + 4i + 6 + 2i = 0$

(b) $10 + 4i + 6 + 2i = 0$

(c) $10 + 4i - 6 + 2i = 0$

(d) $-10 + 4i - 6 + 2i = 0$

3.7 No circuito da Figura 3.49, a corrente i_1 é:

(a) 4 A (b) 3 A

(c) 2 A (d) 1 A

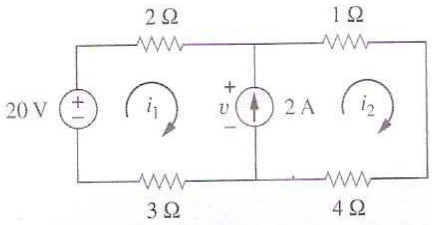


Figura 3.49 Esquema para as Questões para revisão 3.7 e 3.8.

3.8 A tensão v na fonte de corrente no circuito da Figura 3.49 é:

(a) 20 V

(b) 15 V

(c) 10 V

(d) 5 V

3.9 O nome de identificação no *PSpice* para uma fonte de tensão controlada por corrente é:

(a) EX

(b) FX

(c) HX

(d) GX

3.10 Qual das afirmações a seguir não são verdadeiras para o pseudocomponente IPROBE:

(a) Tem de estar associado em série.

(b) Ele mostra a corrente de ramo.

(c) Ele mostra a corrente que passa pelo ramo ao qual está conectado.

(d) Pode ser usado para mostrar a tensão conectando em paralelo.

(e) É usado apenas para análise CC.

(f) Não corresponde a um determinado elemento de circuito.

Respostas: 3.1a, 3.2c, 3.3a, 3.4c, 3.5c, 3.6a, 3.7d, 3.8b, 3.9c, 3.10b,d.

Problemas

• Seções 3.2 e 3.3 Análise nodal

3.1 Usando a Figura 3.50, elabore um problema para ajudar e2d outros estudantes a entender melhor a análise nodal.

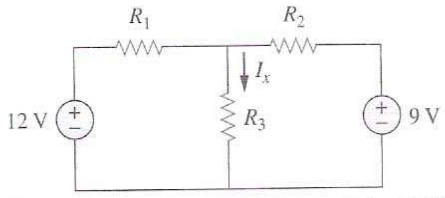


Figura 3.50 Esquema para os Problemas 3.1 e 3.39.

3.2 Para o circuito da Figura 3.51, obtenha v_1 e v_2.

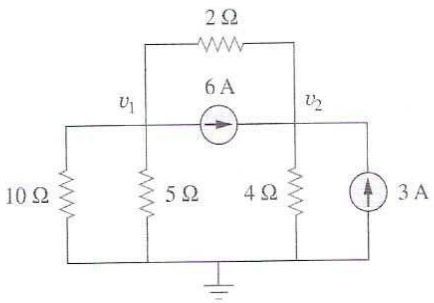


Figura 3.51 Esquema para o Problema 3.2.

3.3 Determine as correntes I_1 a I_4 e a tensão v_o no circuito da Figura 3.52.

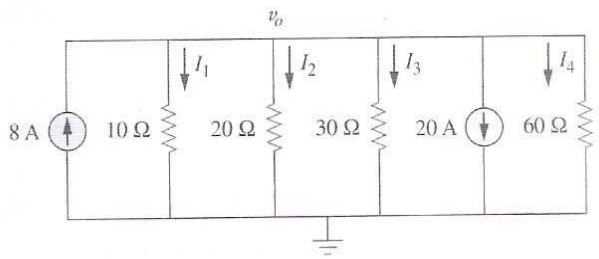


Figura 3.52 Esquema para o Problema 3.3.

3.4 Dado o circuito da Figura 3.53, calcule as correntes i_1 a i_4.

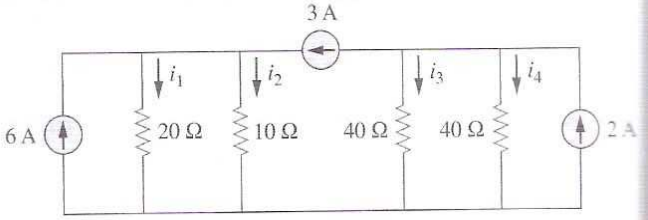


Figura 3.53 Esquema para o Problema 3.4.

3.5 Obtenha v_o no circuito da Figura 3.54.

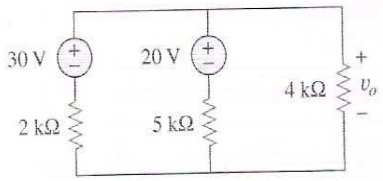


Figura 3.54 Esquema para o Problema 3.5.

3.6 Use a análise nodal para calcular V_1 no circuito da Figura 3.55.

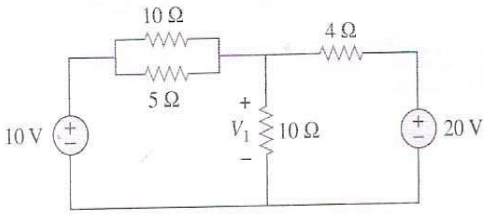


Figura 3.55 Esquema para o Problema 3.6.

3.7 Aplique a análise nodal para determinar V_x no circuito da Figura 3.56.

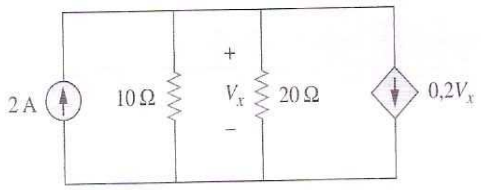


Figura 3.56 Esquema para o Problema 3.7.

3.8 Usando análise nodal, determine v_o no circuito da Figura 3.57.

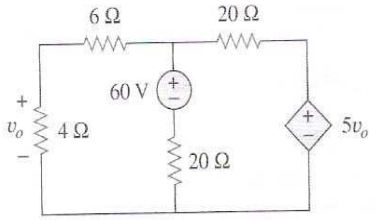


Figura 3.57 Esquema para os Problemas 3.8 e 3.37.

3.9 Determine I_b no circuito da Figura 3.58, usando análise nodal.

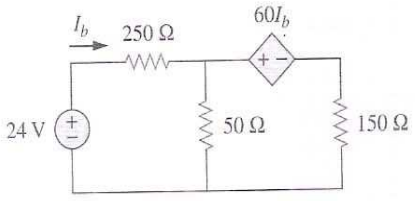


Figura 3.58 Esquema para o Problema 3.9.

3.10 Determine I_o no circuito da Figura 3.59.

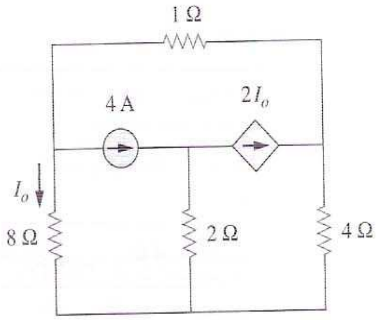


Figura 3.59 Esquema para o Problema 3.10.

3.11 Determine V_o e a potência dissipada em todos os resistores no circuito da Figura 3.60.

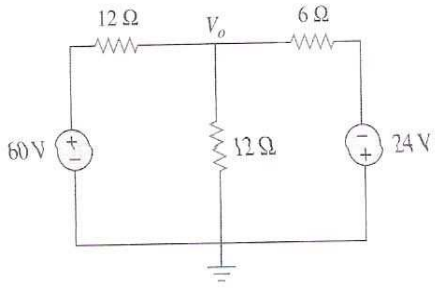


Figura 3.60 Esquema para o Problema 3.11.

3.12 Usando análise nodal, determine V_o no circuito da Figura 3.61.

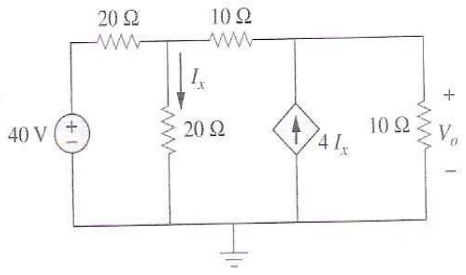


Figura 3.61 Esquema para o Problema 3.12.

3.13 Usando análise nodal, determine v_1 e v_2 no circuito da Figura 3.62.

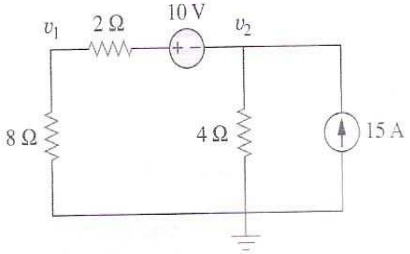


Figura 3.62 Esquema para o Problema 3.13.

3.14 Usando análise nodal, determine v_o no circuito da Figura 3.63.

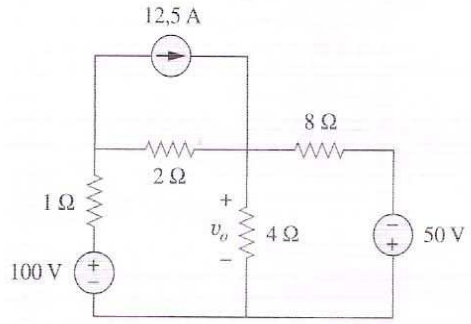


Figura 3.63 Esquema para o Problema 3.14.

3.15 Aplique análise nodal para determinar i_o e a potência dissipada em cada resistor no circuito da Figura 3.64.

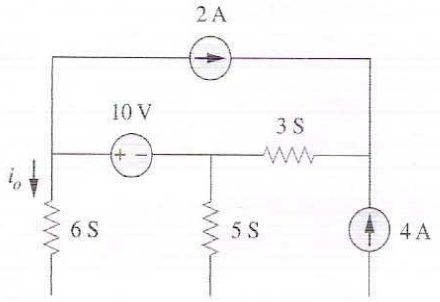


Figura 3.64 Esquema para o Problema 3.15.

3.16 Determine as tensões v_1 a v_3 no circuito da Figura 3.65 usando análise nodal.

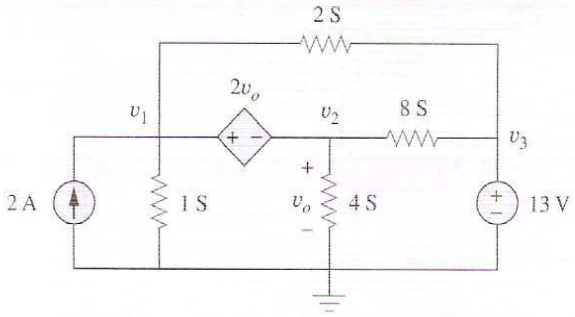


Figura 3.65 Esquema para o Problema 3.16.

3.17 Usando análise nodal, determine a corrente i_o no circuito da Figura 3.66.

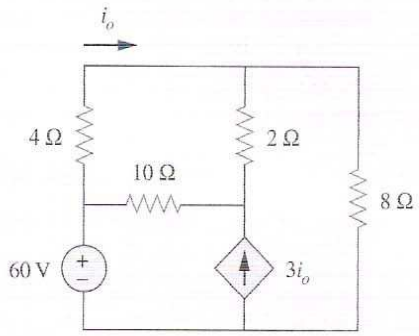


Figura 3.66 Esquema para o Problema 3.17.

3.18 Determine as tensões nodais no circuito da Figura 3.67 usando análise nodal.

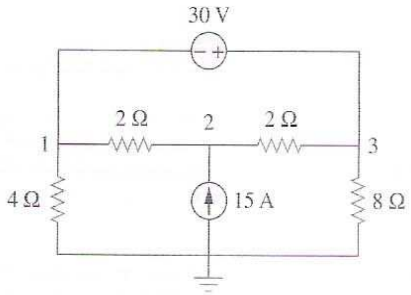


Figura 3.67 Esquema para o Problema 3.18.

3.19 Use a análise nodal para determinar v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura 3.68.

ML

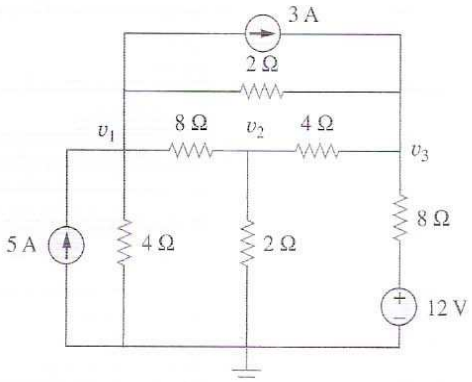


Figura 3.68 Esquema para o Problema 3.19.

3.20 Para o circuito da Figura 3.69, determine v_1 e v_2 usando análise nodal.

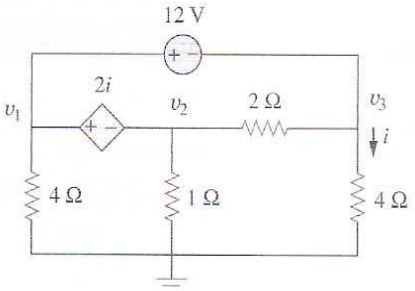


Figura 3.69 Esquema para o Problema 3.20.

3.21 Para o circuito da Figura 3.70, determine v_1 e v_2 usando análise nodal.

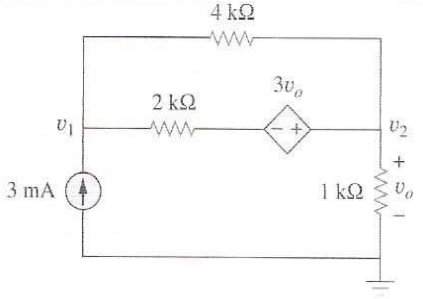


Figura 3.70 Esquema para o Problema 3.21.

3.22 Determine v_1 e v_2 para o circuito da Figura 3.71.

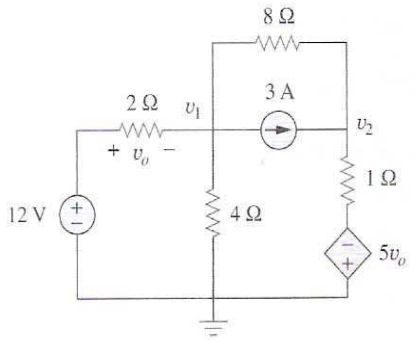


Figura 3.71 Esquema para o Problema 3.22.

3.23 Use a análise nodal para determinar V_o no circuito mostrado na Figura 3.72.

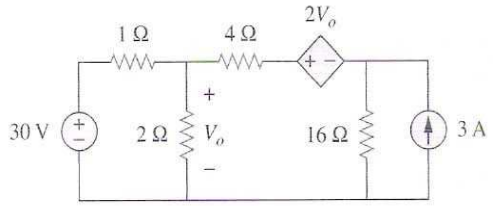


Figura 3.72 Esquema para o Problema 3.23.

3.24 Use a análise nodal e o *MATLAB* para determinar V_o no circuito da Figura 3.73.

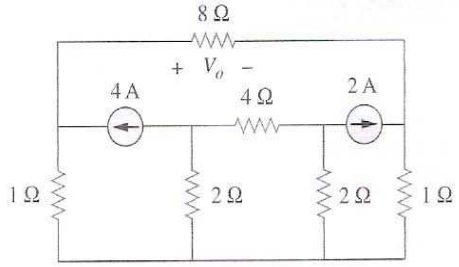


Figura 3.73 Esquema para o Problema 3.24.

3.25 Use análise nodal juntamente com o *MATLAB* para determinar as tensões nos nós da Figura 3.74.

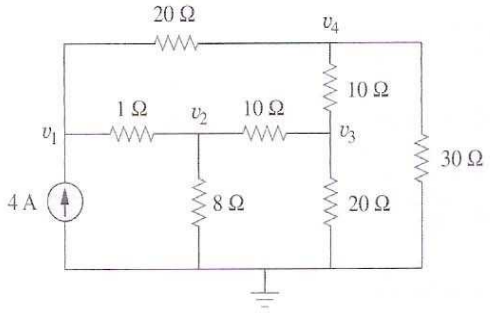


Figura 3.74 Esquema para o Problema 3.25.

3.26 Calcule as tensões nodais v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura 3.75.

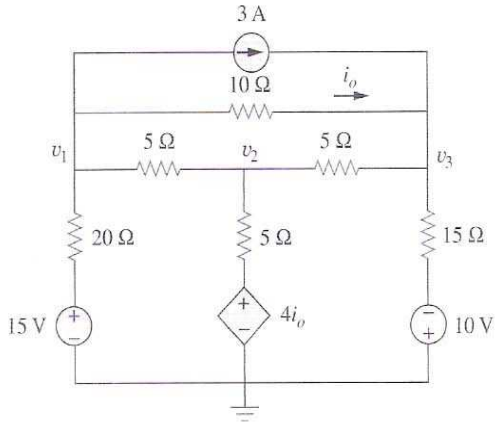


Figura 3.75 Esquema para o Problema 3.26.

***3.27** Use a análise nodal para determinar as tensões v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura 3.76.

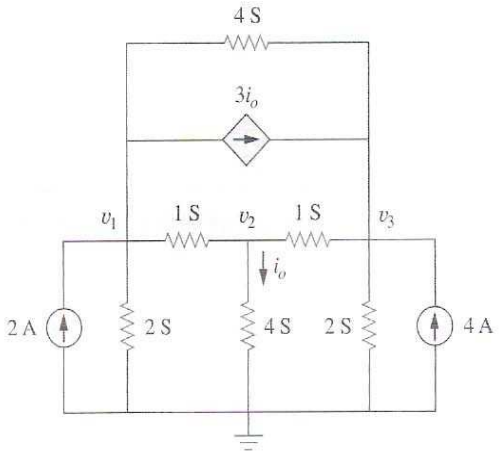


Figura 3.76 Esquema para o Problema 3.27.

***3.28** Use o *MATLAB* para determinar as tensões nos nós a, b, c e d no circuito da Figura 3.77.

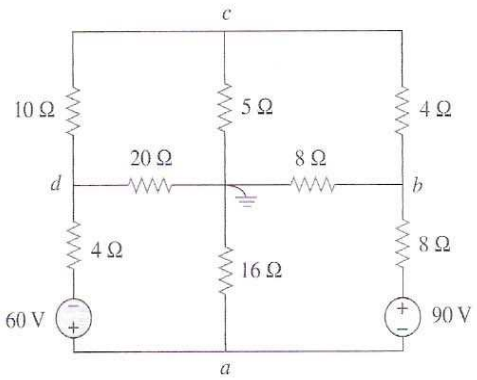


Figura 3.77 Esquema para o Problema 3.28.

* O asterisco indica um problema que constitui um desafio.

3.29 Use o *MATLAB* para determinar as tensões nodais no circuito da Figura 3.78.

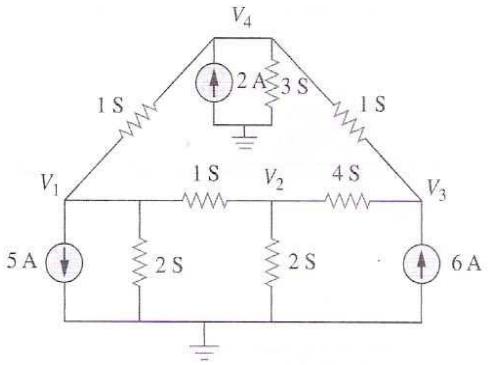


Figura 3.78 Esquema para o Problema 3.29.

3.30 Usando a análise nodal, determine v_o e i_o no circuito da Figura 3.79.

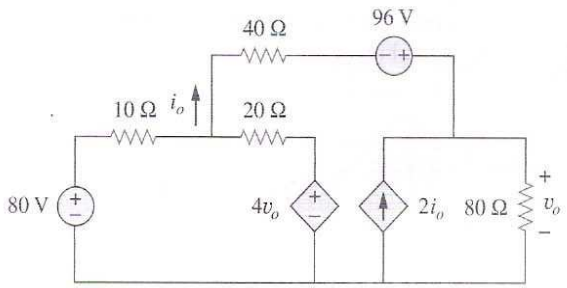


Figura 3.79 Esquema para o Problema 3.30.

3.31 Determine as tensões nodais para o circuito da Figura 3.80.

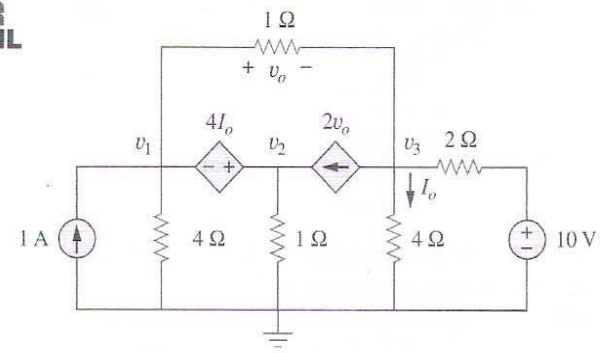


Figura 3.80 Esquema para o Problema 3.31.

3.32 Obtenha as tensões nodais v_1 e v_2 no circuito da Figura 3.81.

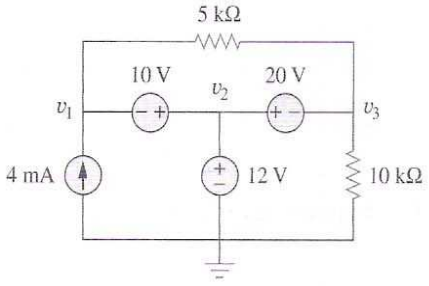
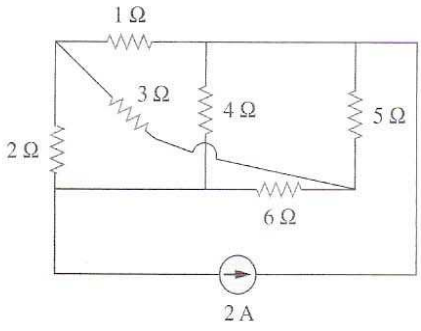


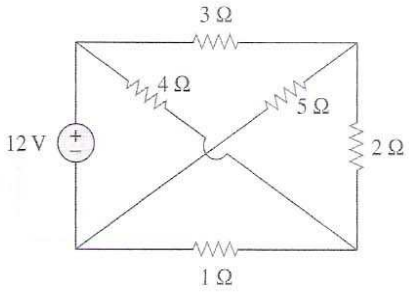
Figura 3.81 Esquema para o Problema 3.32.

Seções 3.4 e 3.5 Análise de malhas

3.33 Qual dos circuitos da Figura 3.82 é planar? Para o circuito planar, redesenhe os circuitos para que não existam ramos cruzando entre si.



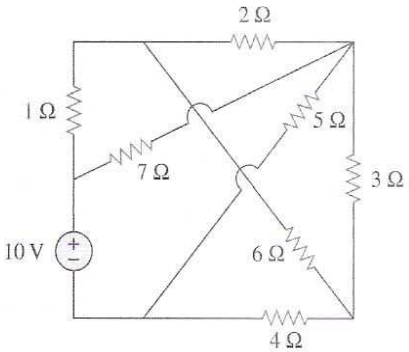
(*a*)



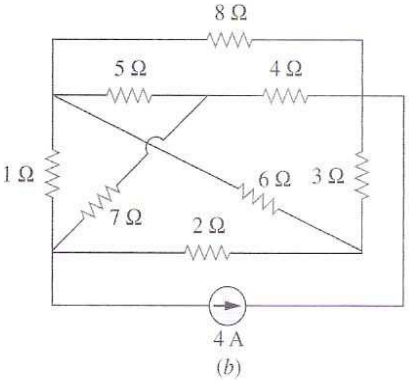
(*b*)

Figura 3.82 Esquema para o Problema 3.33.

3.34 Determine qual dos circuitos da Figura 3.83 é planar e redesenhe-o de modo a que não apresente ramos cruzados.



(*a*)



(*b*)

Figura 3.83 Esquema para o Problema 3.34.

3.35 Refaça o Problema 3.5, usando análise de malhas.

3.36 Use a análise de malhas para determinar i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura 3.84.

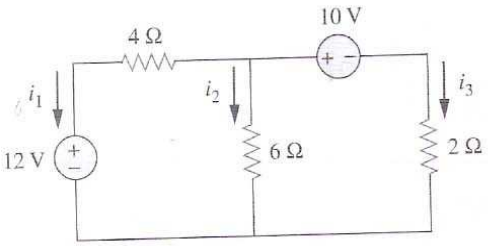


Figura 3.84 Esquema para o Problema 3.36.

3.37 Resolva o Problema 3.8, usando análise de malhas.

3.38 Aplique análise de malhas ao circuito da Figura 3.85 e obtenha I_o.

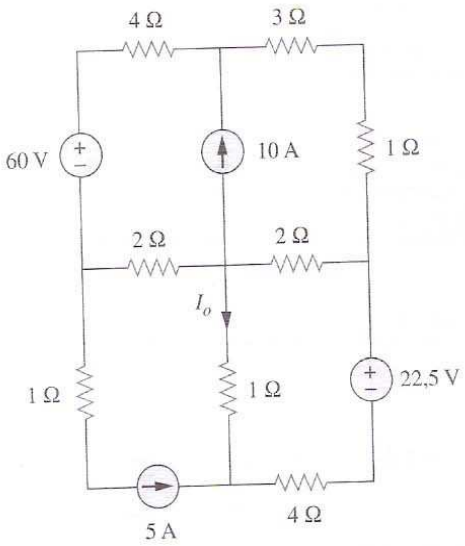


Figura 3.85 Esquema para o Problema 3.38.

3.39 Usando a Figura 3.50, do Problema 3.1, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor a análise de malhas.

3.40 Para o circuito em ponte da Figura 3.86, determine i_o usando análise de malhas.

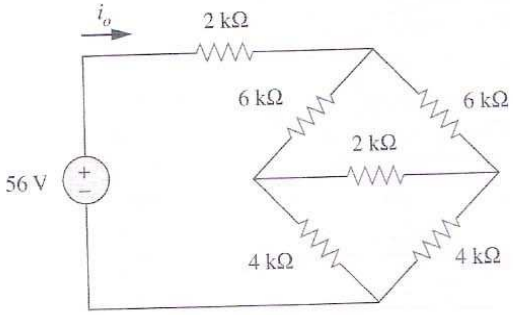


Figura 3.86 Esquema para o Problema 3.40.

3.41 Aplique análise de malhas para determinar i no circuito da Figura 3.87.

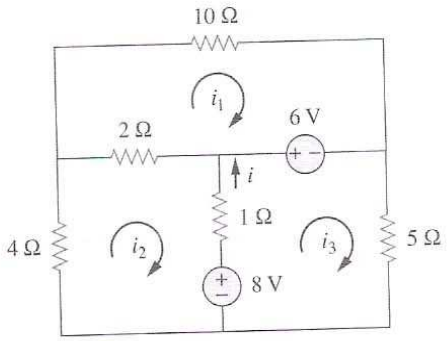


Figura 3.87 Esquema para o Problema 3.41.

3.42 Usando a Figura 3.88, elabore um problema para ajudar estudantes a entenderem melhor a análise de malhas usando matrizes.

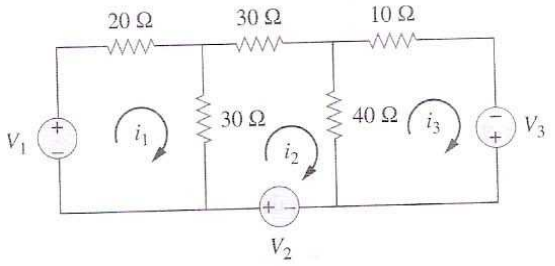


Figura 3.88 Esquema para o Problema 3.42.

3.43 Use a análise de malhas para determinar v_{ab} e i_o no circuito da Figura 3.89.

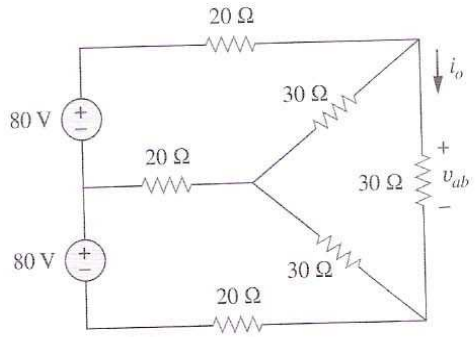


Figura 3.89 Esquema para o Problema 3.43.

3.44 Use análise de malhas para determinar i_o no circuito da Figura 3.90.

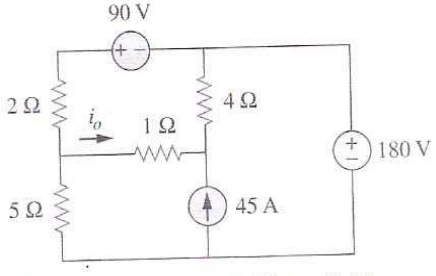


Figura 3.90 Esquema para o Problema 3.44.

3.45 Determine a corrente i no circuito da Figura 3.91.

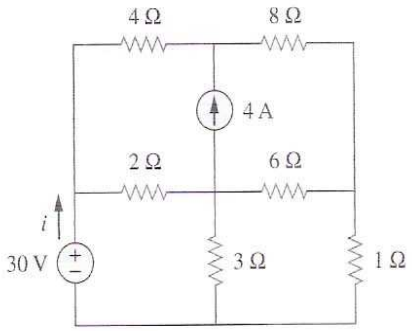


Figura 3.91 Esquema para o Problema 3.45.

3.46 Calcule as correntes de malha i_1 e i_2 na Figura 3.92.

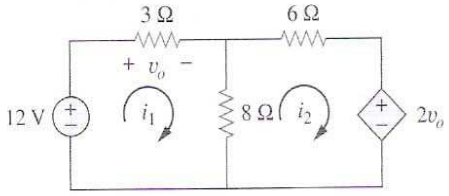


Figura 3.92 Esquema para o Problema 3.46.

3.47 Refaça o Problema 3.19, usando análise nodal.

3.48 Determine a corrente que passa pelo resistor de 10 kΩ no circuito da Figura 3.93, usando análise de malhas.

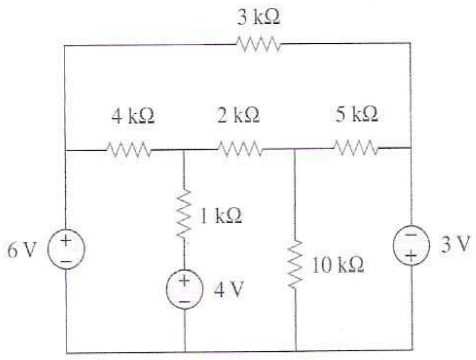


Figura 3.93 Esquema para o Problema 3.48.

3.49 Determine v_o e i_o no circuito da Figura 3.94.

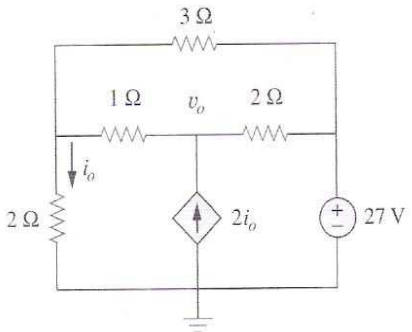


Figura 3.94 Esquema para o Problema 3.49.

3.50 Use a análise de malhas para determinar a corrente i_o no circuito da Figura 3.95.

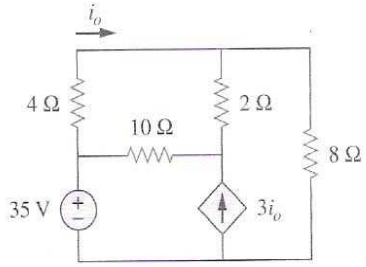


Figura 3.95 Esquema para o Problema 3.50.

3.51 Aplique análise de malhas para determinar v_o no circuito da Figura 3.96.

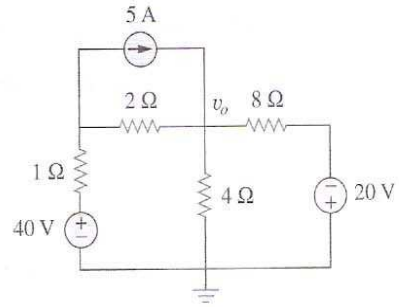


Figura 3.96 Esquema para o Problema 3.51.

3.52 Use a análise de malhas para determinar i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura 3.97.

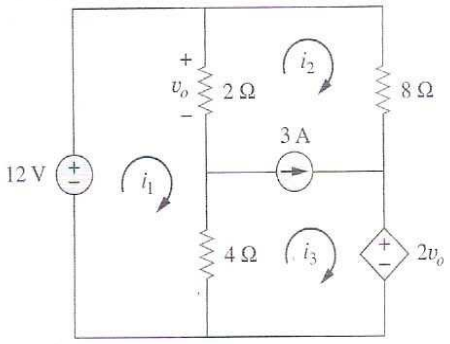


Figura 3.97 Esquema para o Problema 3.52.

3.53 Determine as correntes de malha no circuito da Figura 3.98, usando o *MATLAB*.

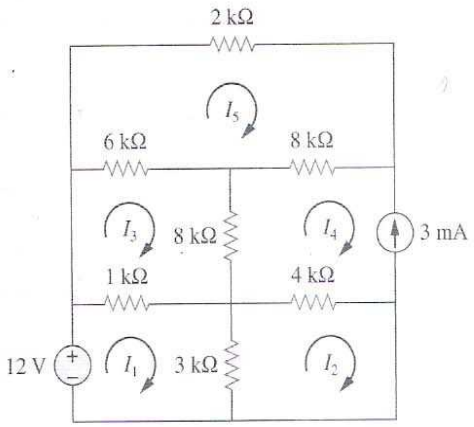


Figura 3.98 Esquema para o Problema 3.53.

3.54 Determine as correntes de malha i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura 3.99.

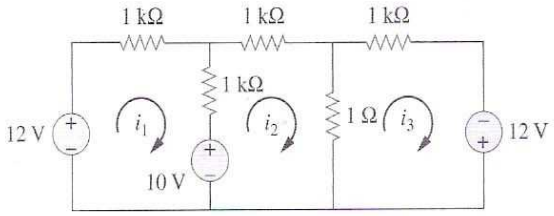


Figura 3.99 Esquema para o Problema 3.54.

* **3.55** No circuito da Figura 3.100 determine I_1, I_2 e I_3.

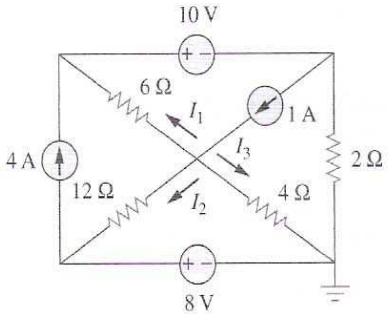


Figura 3.100 Esquema para o Problema 3.55.

3.56 Determine v_1 e v_2 no circuito da Figura 3.101.

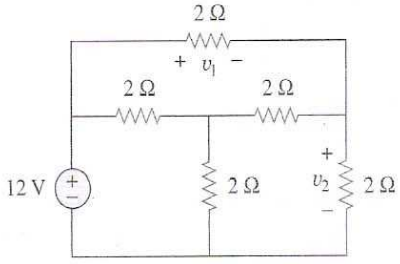


Figura 3.101 Esquema para o Problema 3.56.

3.57 No circuito da Figura 3.102, determine os valores de R, V_1 e V_2 dado que $i_o = 15$ mA.

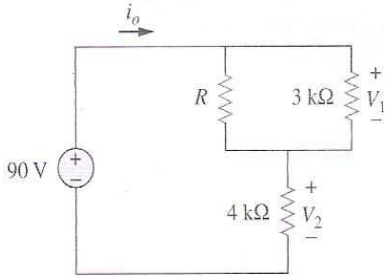


Figura 3.102 Esquema para o Problema 3.57.

3.58 Determine i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura 3.103.

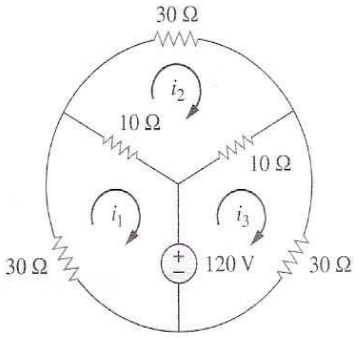


Figura 3.103 Esquema para o Problema 3.58.

3.59 Refaça o Problema 3.30, usando a análise de malhas.

3.60 Calcule a potência dissipada em cada resistor no circuito da Figura 3.104.

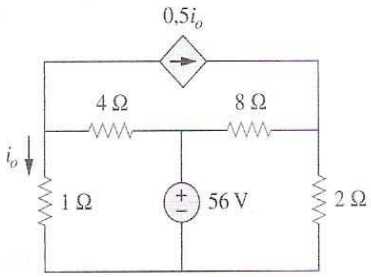


Figura 3.104 Esquema para o Problema 3.60.

3.61 Calcule o ganho de corrente i_o/i_s no circuito da Figura 3.105.

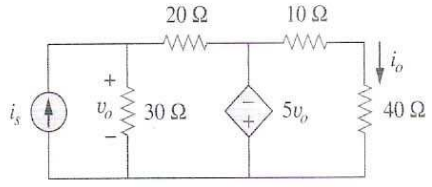


Figura 3.105 Esquema para o Problema 3.61.

3.62 Determine as correntes de malha i_1, i_2 e i_3 na rede da Figura 3.106.

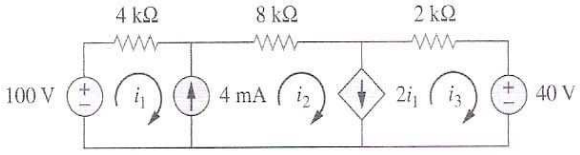


Figura 3.106 Esquema para o Problema 3.62.

3.63 Determine v_x e i_x no circuito mostrado na Figura 3.107.

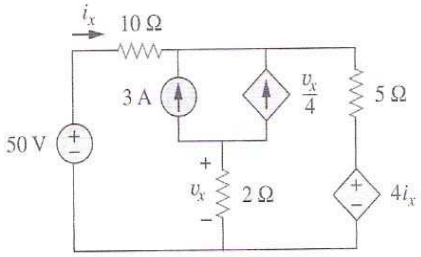


Figura 3.107 Esquema para o Problema 3.63.

3.64 Determine v_o e i_o no circuito da Figura 3.108.

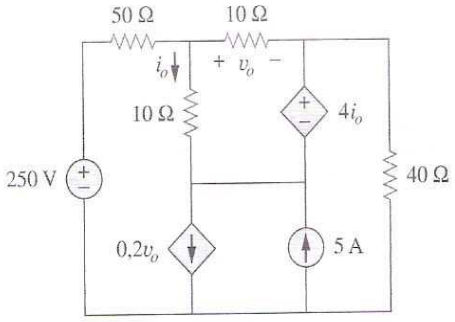


Figura 3.108 Esquema para o Problema 3.64.

3.65 Use o *MATLAB* para descobrir as correntes de malha no circuito da Figura 3.109.

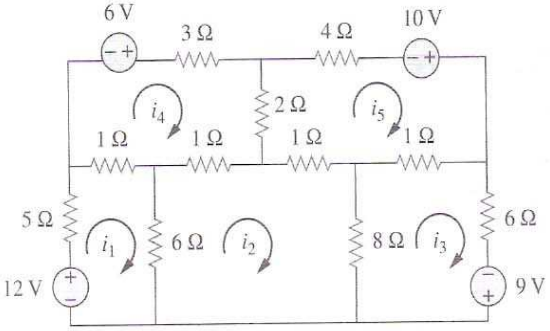


Figura 3.109 Esquema para o Problema 3.65.

3.66 Escreva um conjunto de equações de malha para o circuito da Figura 3.110. Use o *MATLAB* para determinar as correntes de malha.

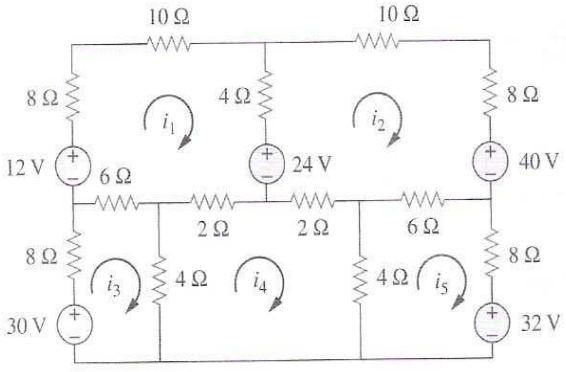


Figura 3.110 Esquema para o Problema 3.66.

Seção 3.6 Análises nodal e de malha por inspeção

3.67 Obtenha, por inspeção, as equações de tensão nos nós para o circuito da Figura 3.111. Em seguida, determine V_o.

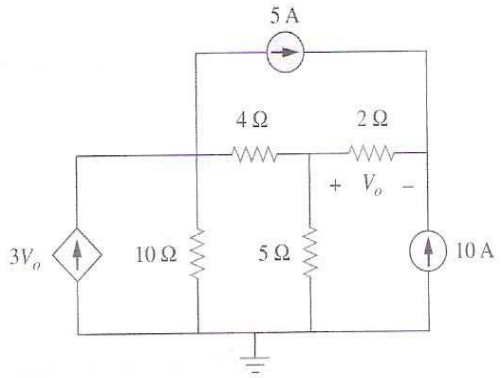


Figura 3.111 Esquema para o Problema 3.67.

3.68 Usando a Figura 3.112, elabore um problema que calcula V_o para ajudar outros estudantes a entenderem melhor a análise nodal. Procure usar valores que facilite os cálculos.

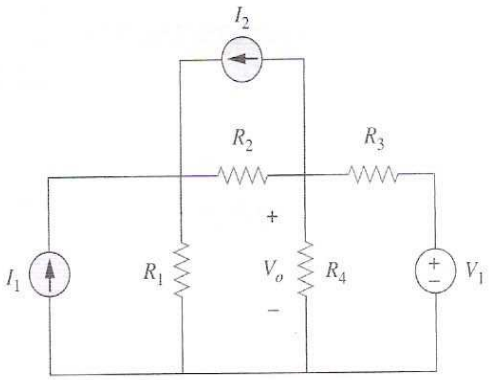


Figura 3.112 Esquema para o Problema 3.68.

3.69 Para o circuito da Figura 3.113, escreva, usando o método da inspeção, as equações de tensão nodal.

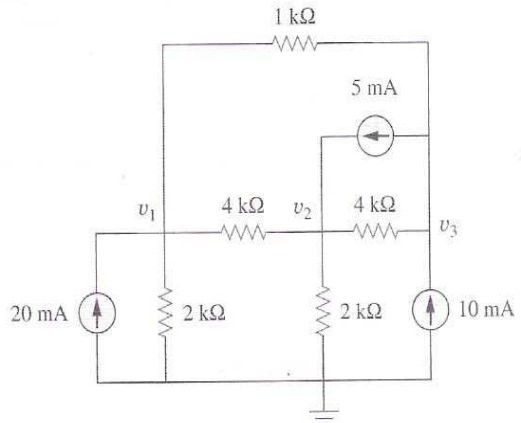


Figura 3.113 Esquema para o Problema 3.69.

3.70 Escreva as equações de tensão nos nós usando o método de inspeção e, em seguida, determine os valores de V_1 e V_2 no circuito da Figura 3.114.

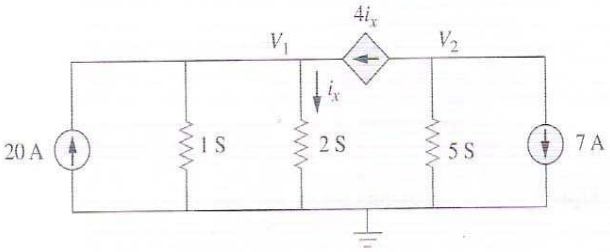


Figura 3.114 Esquema para o Problema 3.70.

3.71 Escreva as equações de corrente de malha para o circuito da Figura 3.115. Em seguida, determine os valores de i_1, i_2 e i_3.

ML

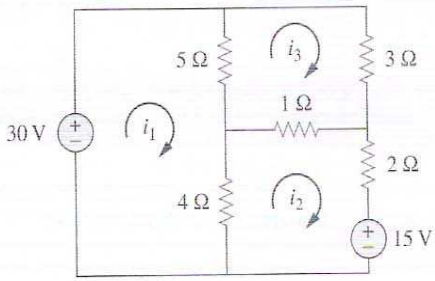


Figura 3.115 Esquema para o Problema 3.71.

3.72 Obtenha, por inspeção, as equações de corrente de malha para o circuito da Figura 3.116.

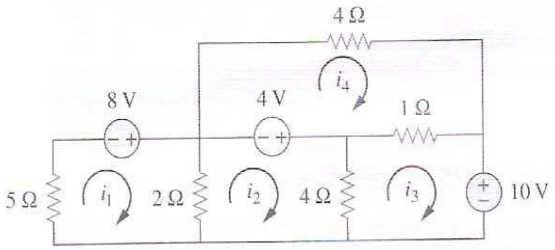


Figura 3.116 Esquema para o Problema 3.72.

3.73 Escreva, por inspeção, as equações de corrente de malha para o circuito da Figura 3.117.

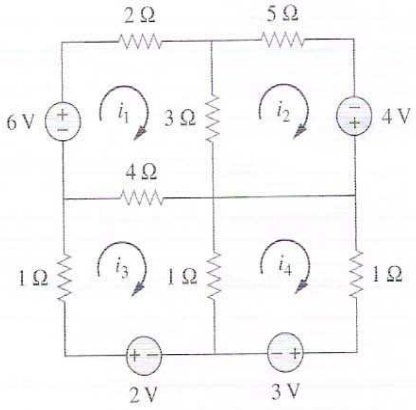


Figura 3.117 Esquema para o Problema 3.73.

3.74 Por inspeção, obtenha as equações de corrente de malha para o circuito da Figura 3.118.

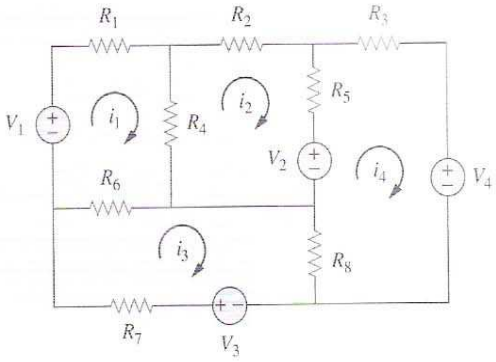


Figura 3.118 Esquema para o Problema 3.74.

Seção 3.8 Análise de circuitos usando o *PSpice ou MultiSim*

3.75 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para resolver o Problema 3.58.

3.76 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para resolver o Problema 3.27.

3.77 Determine V_1 e V_2 no circuito da Figura 3.119, usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

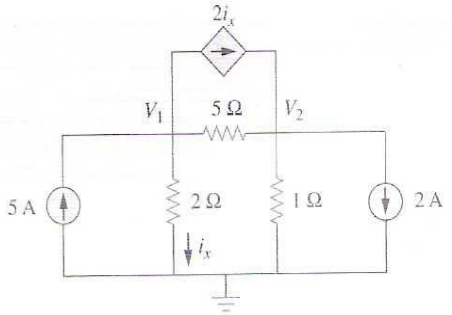


Figura 3.119 Esquema para o Problema 3.77.

3.78 Resolva o Problema 3.20, usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

3.79 Refaça o Problema 3.28, usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

3.80 Determine as tensões nodais v_1 a v_4 no circuito da Figura 3.120, usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

ML

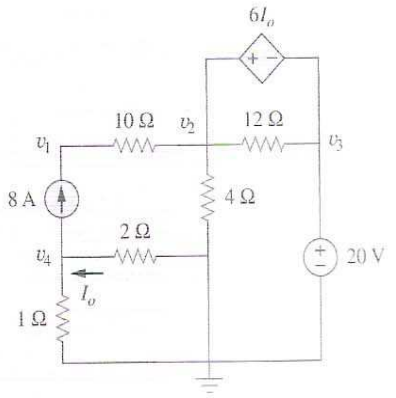


Figura 3.120 Esquema para o Problema 3.80.

3.81 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para resolver o problema do Exemplo 3.4.

3.82 Se a Schematic Netlist (lista de ligações de um esquema) for a apresentada a seguir, desenhe a rede.

```
R_R1    1   2   2K
R_R2    2   0   4K
R_R3    3   0   8K
R_R4    3   4   6K
R_R5    1   3   3K
V_VS    4   0   DC      100
I_IS    0   1   DC      4
F_F1    1   3   VF_F1   2
VF_F1   5   0   0V
E_E1    3   2   1       3       3
```

3.83 O programa a seguir é o Schematic Netlist de determinado circuito. Desenhe o circuito e determine a tensão no nó 2.

```
R_R1    1   2   20
R_R2    2   0   50
R_R3    2   3   70
R_R4    3   0   30
V_VS    1   0   20V
I_IS    2   0   DC    2A
```

Seção 3.9 Aplicações

3.84 Calcule v_o e I_o no circuito da Figura 3.121.

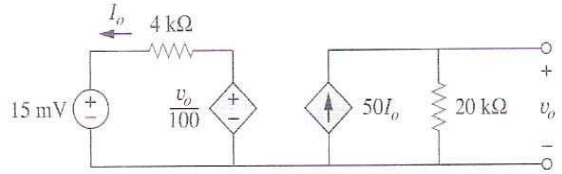


Figura 3.121 Esquema para o Problema 3.84.

3.85 Um amplificador de áudio com resistência de 9 Ω fornece potência para um alto-falante. Qual deve ser a resistência do alto-falante para se obter a potência máxima?

3.86 Para o circuito transistorizado da Figura 3.122, calcule a tensão v_o.

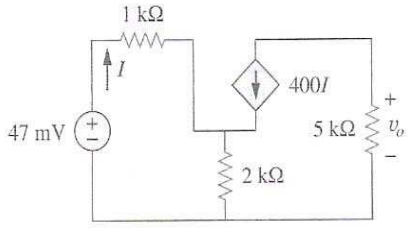


Figura 3.122 Esquema para o Problema 3.86.

3.87 Para o circuito da Figura 3.123, determine o ganho v_o/v_s.

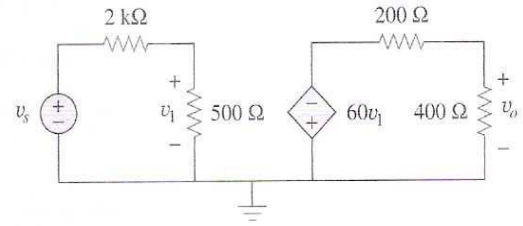


Figura 3.123 Esquema para o Problema 3.87.

* **3.88** Determine o ganho v_o/v_s do circuito amplificador transistorizado na Figura 3.124.

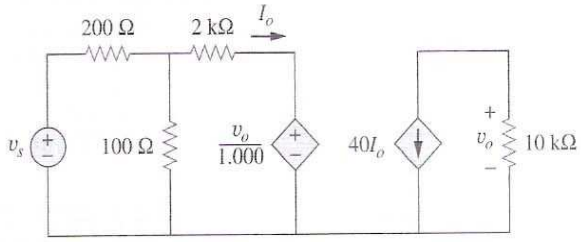


Figura 3.124 Esquema para o Problema 3.88.

3.89 Para o circuito com transistores mostrados na Figura 3.125, determine I_B e V_{CE}. Seja $\beta = 100$ $V_{BE} = 0{,}7$ V.

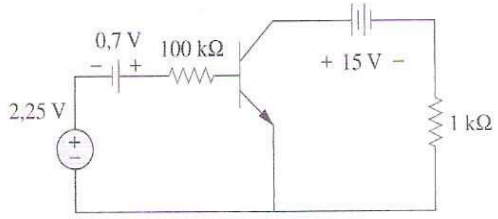


Figura 3.125 Esquema para o Problema 3.89.

3.90 Calcule v_s para o transistor na Figura 3.126 dados $v_o = 4$ V, $\beta = 150$ e $V_{BE} = 0{,}7$ V.

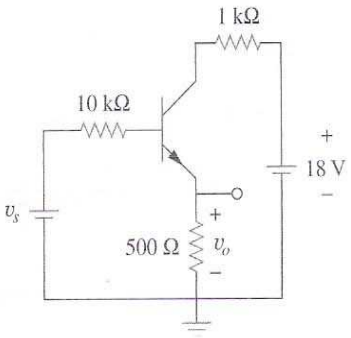


Figura 3.126 Esquema para o Problema 3.90.

3.91 Para o circuito transistorizado da Figura 3.127, determine I_B, V_{CE} e v_o. Suponha $\beta = 200$ e $V_{BE} = 0{,}7$ V.

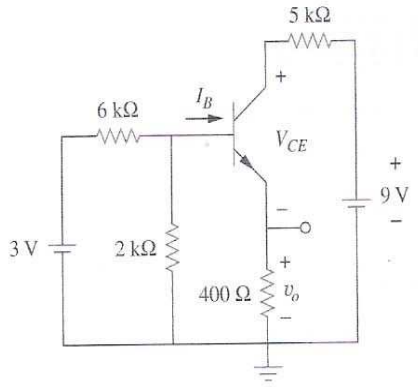


Figura 3.127 Esquema para o Problema 3.91.

3.92 Considere a Figura 3.128 e elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor os transistores. Certifique-se de que tenha usado números que possibilitem resultados lógicos.

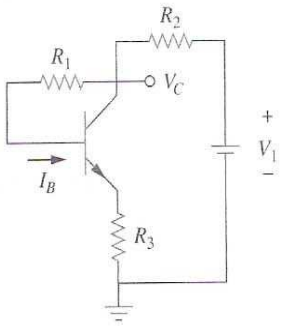


Figura 3.128 Esquema para o Problema 3.92.

Problema abrangente

* **3.93** Refaça o Exemplo 3.11 calculando-o manualmente.

4

TEOREMAS DE CIRCUITOS

O seu sucesso como engenheiro será diretamente proporcional à sua habilidade em se comunicar!

Charles K. Alexander

Progresso profissional

Aperfeiçoando suas habilidades em comunicação

Fazer um curso de análise de circuitos elétricos é uma das etapas para sua carreira em engenharia elétrica. Aperfeiçoar suas habilidades em comunicação enquanto você ainda está na faculdade também é importante, já que passará muito tempo comunicando-se.

Profissionais da área se queixam com frequência do despreparo dos engenheiros recém-formados tanto na comunicação escrita como na oral. Pode ser que você fale ou escreva rápido e com desenvoltura, porém, com que *eficiência* você se comunica? A arte da comunicação eficaz é de suma importância para seu sucesso como engenheiro, tornando-o um valioso patrimônio.

Para engenheiros da área, comunicação é fundamental para seu crescimento profissional. Considere o resultado de uma pesquisa de grandes empresas norte-americanas que perguntava quais fatores influenciavam na promoção gerencial, a qual incluía uma lista de 22 qualidades pessoais e sua importância no progresso profissional. Talvez você possa ficar surpreso ao saber que "capacidade técnica com base na experiência" tenha ocupado uma das quatro últimas posições dessa lista. Atributos como autoconfiança, ambição, flexibilidade, maturidade, capacidade de tomar decisões sensatas, realizar as coisas com e por meio das pessoas e capacidade de trabalhar arduamente ocuparam uma posição mais elevada nessa lista. No topo dela estava "habilidade em se comunicar". Quanto mais sua carreira avança, mais você precisará se comunicar. Portanto, você deve considerar a comunicação eficaz como uma importante ferramenta em sua caixa de ferramentas de engenheiro.

Aprender como se comunicar de maneira eficaz é uma tarefa para a vida toda, na qual você sempre deve estar atento, e a melhor época para começar é enquanto ainda está na faculdade. Procure continuamente oportunidades para desenvolver e reforçar suas habilidades em leitura, escrita, compreensão e orais. Isso pode ser feito por meio de apresentações em classe, projetos em equipe, participação ativa nas organizações estudantis e em cursos de comunicação. Você correrá menos risco mais tarde, quando estiver no ambiente de trabalho.

4.1 Introdução

Uma grande vantagem de analisar circuitos por intermédio das leis de Kirchhoff, como fizemos no Capítulo 3, é o fato de podermos analisá-los sem ter de mexer em sua configuração original. Uma desvantagem importante dessa abordagem é que, para um circuito grande e complexo, há muitos cálculos enfadonhos envolvidos.

O crescimento nas áreas de aplicação de circuitos elétricos levou a uma evolução dos circuitos simples para os complexos. Para lidar com essa complexidade, os engenheiros desenvolveram, ao longo dos anos, alguns teoremas para simplificar a análise de circuitos, como os teoremas de Thévenin e de Norton. E já que estes são aplicáveis apenas a circuitos *lineares*, discutiremos primeiro o conceito de linearidade em circuitos. Além dos teoremas de circuitos, abordaremos, neste capítulo, os conceitos de superposição, transformação de fontes e máxima transferência de potência. Os conceitos aqui desenvolvidos se aplicam, na última seção, à modelagem de fontes e medidas de resistência.

4.2 Propriedade da linearidade

Linearidade é a propriedade de um elemento descrever uma relação linear entre causa e efeito. Embora a propriedade se aplique a vários elementos de circuitos, limitaremos sua aplicabilidade aos resistores. Essa propriedade é uma combinação da propriedade de homogeneidade (aplicação de um fator de escala) e da propriedade da aditividade.

A propriedade da homogeneidade requer que, se a entrada (também chamada *excitação*) for multiplicada por uma constante, então a saída (também denominada *resposta*) deverá ser multiplicada por essa mesma constante. Por exemplo, para um resistor, a lei de Ohm relaciona a entrada i com a saída v,

$$v = iR \tag{4.1}$$

Se a corrente for aumentada por uma constante k, então a tensão aumenta correspondentemente de k, isto é,

$$\boxed{kiR = kv} \tag{4.2}$$

A propriedade de aditividade requer que a resposta para a soma de entradas seja a soma das respostas a cada entrada aplicada separadamente. Usando a relação tensão-corrente de um resistor, se

$$v_1 = i_1 R \tag{4.3a}$$

e

$$v_2 = i_2 R \tag{4.3b}$$

então aplicar $(i_1 + i_2)$ resulta em

$$\boxed{v = (i_1 + i_2)R = i_1 R + i_2 R = v_1 + v_2} \tag{4.4}$$

Um resistor é um elemento linear, pois a relação tensão-corrente satisfaz tanto a propriedade de homogeneidade quanto de aditividade.

Por exemplo, quando a corrente i_1 flui pelo resistor R, a potência é $p_1 = Ri_1^2$, e quando a corrente i_2 passa pelo resistor R, a potência é $p_2 = Ri_2^2$. Se a corrente $i_1 + i_2$ passa por R, a potência absorvida é $p_3 = R(i_1 + i_2)^2 = Ri_1^2 + Ri_2^2 + 2Ri_1i_2 \neq p_1 + p_2$. Portanto, a relação de potência é não linear.

Geralmente, um circuito é linear se ele for tanto aditivo como homogêneo, pois consiste apenas em elementos lineares, fontes lineares dependentes e independentes.

Um **circuito linear** é um circuito cuja saída está linearmente relacionada (ou é diretamente proporcional) à sua entrada.

Ao longo deste livro, consideraremos apenas circuitos lineares. Note que já que $p = i^2R = v^2/R$ (tornando-a uma função quadrática em vez de uma função linear), a relação entre potência e tensão (ou corrente) é não linear. Portanto, os teoremas vistos neste capítulo não são aplicáveis à potência.

Para ilustrar o princípio da linearidade, consideremos o circuito linear mostrado na Figura 4.1, no qual não possui nenhuma fonte independente dentro dele. Porém, ele é excitado por uma fonte de tensão v_s, que serve como entrada, e é terminado com uma carga R. Poderíamos adotar a corrente i que passa por R como saída. Suponha que $v_s = 10$ V resulte em $i = 2$ A. De acordo com o princípio da linearidade, $v_s = 1$ V resultará em $i = 0{,}2$ A. Do mesmo modo, $i = 1$ mA tem que ser o resultado de $v_s = 5$ mV.

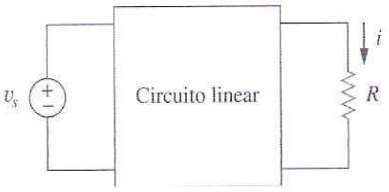


Figura 4.1 Circuito linear com entrada v_s e saída i.

EXEMPLO 4.1

Para o circuito da Figura 4.2, determine I_o quando $v_s = 12$ V e $v_s = 24$ V.

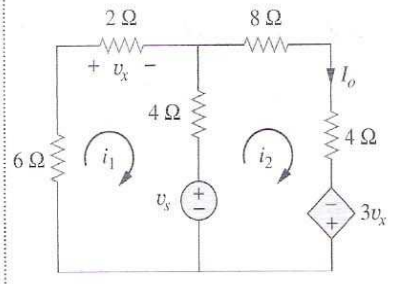


Figura 4.2 Esquema para o Exemplo 4.1.

Solução: Aplicando a LKT aos dois laços, obtemos

$$12i_1 - 4i_2 + v_s = 0 \tag{4.1.1}$$

$$-4i_1 + 16i_2 - 3v_x - v_s = 0 \tag{4.1.2}$$

Porém $v_x = 2i_1$, logo, a Equação (4.1.2) fica

$$-10i_1 + 16i_2 - v_s = 0 \tag{4.1.3}$$

A soma das Equações (4.1.1) e (4.1.3) resulta em

$$2i_1 + 12i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = -6i_2$$

Substituindo isso na Equação (4.1.1), obtemos

$$-76i_2 + v_s = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{v_s}{76}$$

Quando $v_s = 12$ V,

$$I_o = i_2 = \frac{12}{76}\text{A}$$

Quando $v_s = 24$ V,

$$I_o = i_2 = \frac{24}{76}\text{A}$$

demonstrando que, quando o valor da fonte dobra, I_o dobra.

PROBLEMA PRÁTICO 4.1

Para o circuito da Figura 4.3, determine v_o quando $i_s = 30$ A e $i_s = 45$ A.

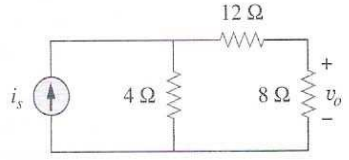


Figura 4.3 Esquema para o Problema prático 4.1.

Resposta: 40 V, 60 V.

EXEMPLO 4.2

Supondo $I_o = 1$ A e usando a propriedade de linearidade, encontre o valor real de I_o no circuito da Figura 4.4.

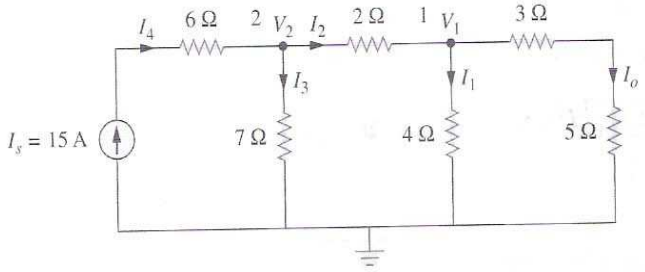


Figura 4.4 Esquema para o Exemplo 4.2.

Solução: Se $I_o = 1$ A, então $V_1 = (3 + 5)I_o = 8$ V e $I_1 = V_1/4 = 2$ A. Aplicando a LKC ao nó 1, temos

$$I_2 = I_1 + I_o = 3 \text{ A}$$

$$V_2 = V_1 + 2I_2 = 8 + 6 = 14 \text{ V}, \qquad I_3 = \frac{V_2}{7} = 2 \text{ A}$$

Aplicando a LKC ao nó 2, obtemos

$$I_4 = I_3 + I_2 = 5 \text{ A}$$

Consequentemente, $I_s = 5$ A. Isso mostra que supondo $I_o = 1$ resulta em $I_s = 5$ A, o valor real da corrente da fonte de 15 A resultará em $I_o = 3$ A como valor real.

PROBLEMA PRÁTICO 4.2

Suponha $V_o = 1$ V e use a propriedade da linearidade para calcular o valor real de V_o no circuito da Figura 4.5.

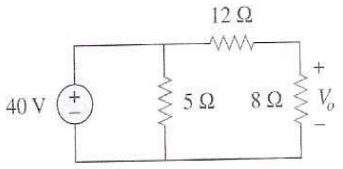


Figura 4.5 Esquema para o Problema prático 4.2.

Resposta: 16 V.

4.3 Superposição

Se um circuito tiver duas ou mais fontes independentes, uma maneira de determinar o valor de uma variável específica (tensão ou corrente) é usar a análise nodal ou a de malhas apresentadas no Capítulo 3. Outra forma seria determinar a contribuição de cada fonte independente à variável e então somá-las. Essa última forma é conhecida como *superposição*.

O conceito da superposição se baseia na propriedade da linearidade.

O princípio da **superposição** afirma que a tensão (ou a corrente) em um elemento em um circuito linear é a soma algébrica da soma das tensões (ou das correntes) naquele elemento em virtude da atuação isolada de cada uma das fontes independentes.

A superposição não se limita apenas à análise de circuitos e se aplica a vários campos em que causa e efeito guardam uma relação linear entre si.

O princípio da superposição ajuda a analisar um circuito linear como mais de uma fonte independente calculando, separadamente, a contribuição de cada fonte. Entretanto, para aplicar esse princípio, precisamos saber duas coisas:

1. Consideramos uma fonte independente por vez enquanto todas as demais fontes independentes estão *desligadas*. Isso implica substituir cada fonte de tensão por 0 V (ou um curto-circuito) e cada fonte de corrente por 0 A

Geralmente são usados outros termos como *suprimidas, desativadas, mortas,* ou *ajustadas para o valor zero* para transmitir a mesma ideia.

(ou um circuito aberto). Dessa maneira, obtemos um circuito mais simples e mais fácil de manipular.

2. As fontes dependentes são deixadas intactas, pois elas são controladas por variáveis de circuito.

Com isso em mente, aplicamos o princípio da superposição em três etapas:

Etapas para a aplicação do princípio da superposição:

1. Desative todas as fontes independentes, exceto uma delas. Encontre a saída (tensão ou corrente) em razão dessa fonte ativa usando as técnicas vistas nos Capítulos 2 e 3.
2. Repita a etapa 1 para cada uma das demais fontes independentes.
3. Encontre a contribuição total somando algebricamente todas as contribuições em razão das fontes independentes.

Analisar um circuito por meio da superposição tem uma grande desvantagem: muito provavelmente envolverá maior trabalho. Se o circuito tiver três fontes independentes, talvez tenhamos de analisar três circuitos mais simples, cada um dos quais fornecendo sua contribuição em decorrência da fonte individual respectiva. Porém, a superposição ajuda efetivamente a reduzir um circuito complexo a circuitos mais simples pela substituição de fontes de tensão por curtos-circuitos e fontes de corrente por circuitos abertos.

Esteja certo de que a superposição se baseia na linearidade; por essa razão, ela não se aplica ao efeito sobre a potência devido a cada fonte, porque a potência absorvida por um resistor depende do quadrado da tensão ou corrente. Se for preciso o valor da potência, a corrente (ou a tensão) no elemento tem de ser calculada primeiro usando a superposição.

EXEMPLO 4.3

Use o teorema da superposição para encontrar v no circuito da Figura 4.6.

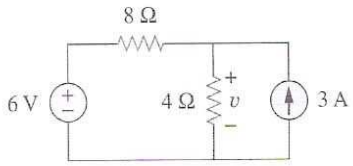


Figura 4.6 Esquema para o Exemplo 4.3.

Solução: Já que existem duas fontes, façamos que

$$v = v_1 + v_2$$

onde v_1 e v_2 são as contribuições devidas, respectivamente, à fonte de tensão de 6 V e à fonte de corrente de 3 A. Para obter v_1, fazemos que a fonte de corrente seja zero, conforme mostrado na Figura 4.7*a*. Aplicando a LKT ao laço da Figura 4.7*a*, temos

$$12i_1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0{,}5 \text{ A}$$

Portanto,

$$v_1 = 4i_1 = 2 \text{ V}$$

Também poderíamos usar a divisão de tensão para obter v_1, escrevendo

$$v_1 = \frac{4}{4+8}(6) = 2 \text{ V}$$

Para obtermos v_2, fazemos que a fonte de tensão seja zero, como indicado na Figura 4.7*b*. Usando divisão de corrente

$$i_3 = \frac{8}{4+8}(3) = 2 \text{ A}$$

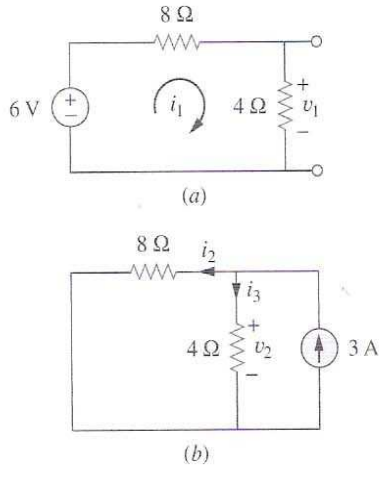


Figura 4.7 Esquema para o Exemplo 4.3: (*a*) cálculo de v_1; (*b*) cálculo de v_2.

Logo,

$$v_2 = 4i_3 = 8 \text{ V}$$

e encontramos

$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10 \text{ V}$$

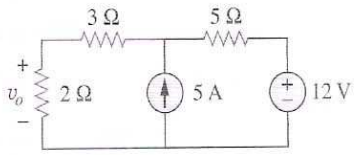


Figura 4.8 Esquema para o Problema prático 4.3.

PROBLEMA PRÁTICO 4.3

Usando o teorema da superposição, determine v_o, no circuito da Figura 4.8.

Resposta: 7,4 V.

EXEMPLO 4.4

Determine i_o no circuito da Figura 4.9 usando superposição.

Solução: O circuito da Figura 4.9 envolve uma fonte dependente, que deve ser mantida intacta. Fazemos

$$i_o = i_o' + i_o'' \tag{4.4.1}$$

onde i_o' e i_o'' são devidas, respectivamente, à fonte de corrente de 4 A e à fonte de tensão de 20 V. Para obter i_o' desativamos a fonte de tensão de 20 V de modo a ter o circuito da Figura 4.10*a*. Aplicamos a análise de malhas de modo a obter i_o'.

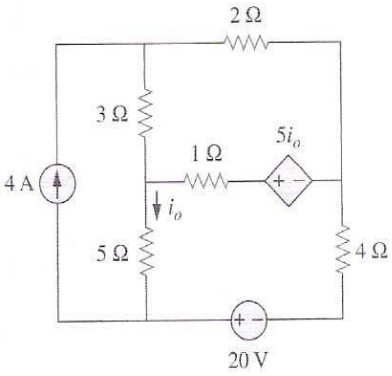


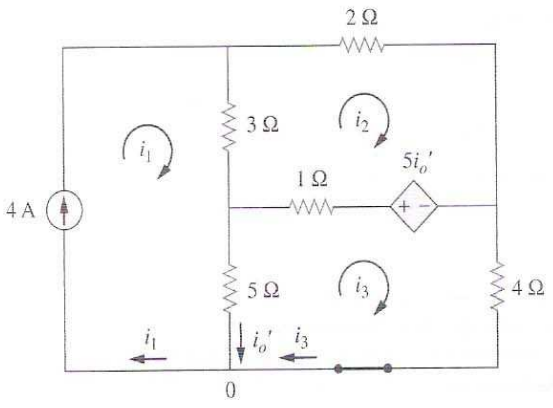
Figura 4.9 Esquema para o Exemplo 4.4.

Para o laço 1,

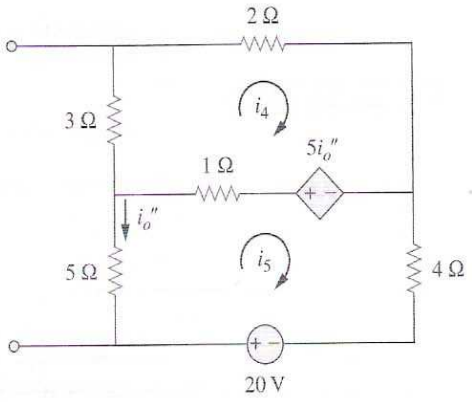
$$i_1 = 4 \text{ A} \tag{4.4.2}$$

Para o laço 2,

$$-3i_1 + 6i_2 - 1i_3 - 5i_o' = 0 \tag{4.4.3}$$



(*a*)



(*b*)

Figura 4.10 Esquema para o Exemplo 4.4: Aplicação do princípio da superposição para: (*a*) obter i_o'; (*b*) obter i_o''.

Para o laço 3,

$$-5i_1 - 1i_2 + 10i_3 + 5i_o' = 0 \tag{4.4.4}$$

Mas no nó 0,

$$i_3 = i_1 - i_o' = 4 - i_o' \tag{4.4.5}$$

Substituindo as Equações (4.4.2) e (4.4.5) nas Equações (4.4.3) e (4.4.4), temos duas equações simultâneas

$$3i_2 - 2i_o' = 8 \tag{4.4.6}$$

$$i_2 + 5i'_o = 20 \tag{4.4.7}$$

que podem ser resolvidas para se obter

$$i'_o = \frac{52}{17}\text{A} \tag{4.4.8}$$

Para obtermos i''_o, desativamos a fonte de corrente de 4 A de modo que o circuito fique como aquele mostrado na Figura 4.10*b*. Para o laço 4, a lei das malhas dá

$$6i_4 - i_5 - 5i''_o = 0 \tag{4.4.9}$$

e para o laço 5,

$$-i_4 + 10i_5 - 20 + 5i''_o = 0 \tag{4.4.10}$$

Mas $i_5 = -i''_o$. Substituindo isso nas Equações (4.4.9) e (4.4.10) temos

$$6i_4 - 4i''_o = 0 \tag{4.4.11}$$

$$i_4 + 5i''_o = -20 \tag{4.4.12}$$

que resolvemos para obter

$$i''_o = -\frac{60}{17}\text{A} \tag{4.4.13}$$

Agora, substituir as Equações (4.4.8) e (4.4.13) na Equação (4.4.1) resulta em

$$i_o = -\frac{8}{17} = -0{,}4706\text{ A}$$

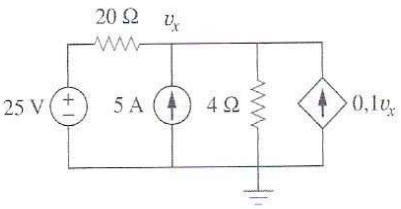


Figura 4.11 Esquema para o Problema prático 4.4.

PROBLEMA PRÁTICO 4.4

Use superposição para determinar v_x no circuito da Figura 4.11.

Resposta: $v_x = 31{,}25$ V.

EXEMPLO 4.5

Para o circuito da Figura 4.12, use o teorema da superposição para determinar i.

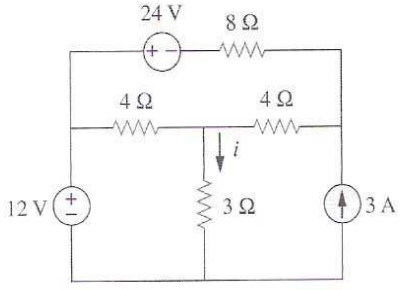


Figura 4.12 Esquema para o Exemplo 4.5.

Solução: Nesse caso, temos três fontes. Façamos

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

onde i_1, i_2 e i_3 são devidas, respectivamente, às fontes de 12 V, 24 V e de 3 A. Para obter i_1, considere o circuito da Figura 4.13*a*. Associando em série o resistor de 4 Ω (do lado direito) com o resistor de 8 Ω dá 12 Ω. Os 12 Ω em paralelo com 4 Ω resulta em $12 \times 4/16 = 3$ Ω. Portanto,

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2\text{ A}$$

Para obtermos i_2, considere o circuito da Figura 4.13*b*. Aplicando a análise de malhas, temos

$$16i_a - 4i_b + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4i_a - i_b = -6 \tag{4.5.1}$$

$$7i_b - 4i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{7}{4}i_b \tag{4.5.2}$$

Substituindo a Equação (4.5.2) na Equação (4.5.1) temos

$$i_2 = i_b = -1$$

Para obtermos i_3, considere o circuito da Figura 4.13*c*. Aplicando a análise nodal, temos

$$3 = \frac{v_2}{8} + \frac{v_2 - v_1}{4} \quad \Rightarrow \quad 24 = 3v_2 - 2v_1 \tag{4.5.3}$$

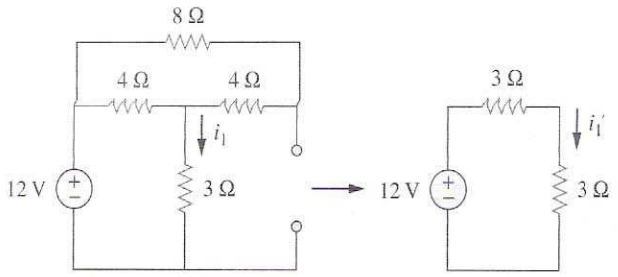
$$\frac{v_2 - v_1}{4} = \frac{v_1}{4} + \frac{v_1}{3} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{10}{3}v_1 \tag{4.5.4}$$

Substituindo a Equação (4.5.4) na Equação (4.5.3), resulta em $v_i = 3$ e obtemos

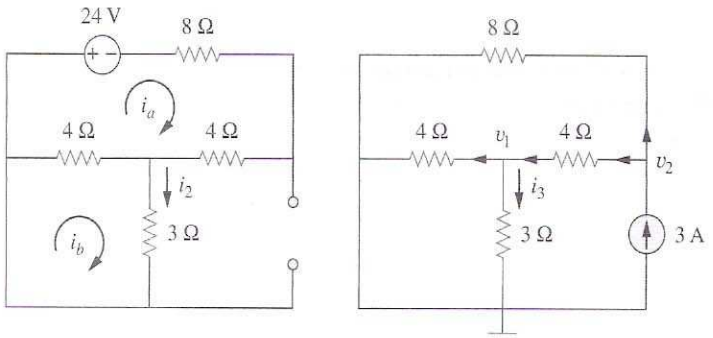
$$i_3 = \frac{v_1}{3} = 1 \text{ A}$$

Portanto,

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2 \text{ A}$$



(*a*)



(*b*) (*c*)

Figura 4.13 Esquema para o Exemplo 4.5.

PROBLEMA PRÁTICO 4.5

Determine I no circuito da Figura 4.14 usando o princípio da superposição.

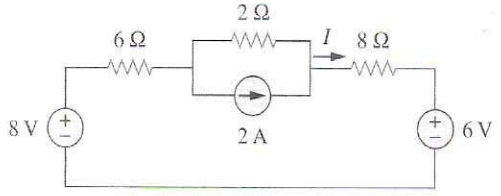


Figura 4.14 Esquema para o Problema prático 4.5.

Resposta: 375 mA.

4.4 Transformação de fontes

Já percebemos que a associação série-paralelo e a transformação estrela-triângulo ajudam a simplificar os circuitos. A *transformação de fontes* é outra ferramenta que ajuda a simplificá-los. Fundamental para essas ferramentas é o conceito de *equivalência*. Lembramos que um circuito equivalente é um circuito cujas curvas características v-i são idênticas à do circuito original.

Na Seção 3.6, vimos que as equações nó-tensão (ou malha-corrente) podem ser obtidas por simples inspeção de um circuito quando as fontes são todas de corrente independentes (ou todas de tensão independentes). Portanto, é conveniente, em análise de circuitos, sermos capazes de substituir uma fonte de tensão em série com um resistor por uma fonte de corrente em paralelo com um resistor, ou vice-versa, conforme apresentado na Figura 4.15. Qualquer uma dessas substituições é conhecida como *transformação de fontes*.

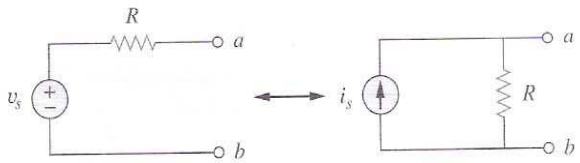


Figura 4.15 Transformação de fontes independentes.

Transformação de fontes é o processo de substituir uma fonte de tensão v_s em série com um resistor R por uma fonte de corrente i_s em paralelo com um resistor R, ou vice-versa.

Os dois circuitos da Figura 4.15 são equivalentes, desde que tenham a mesma relação tensão-corrente nos terminais a-b. É fácil demonstrar que eles são de fato equivalentes. Se as fontes forem desativadas, a resistência equivalente nos terminais a-b em ambos os circuitos será R. Da mesma forma, quando os terminais a-b forem curto-circuitados, a corrente de curto-circuito (short-circuit) fluindo de a para b é $i_{sc} = v_s/R$ no circuito do lado esquerdo e $i_{sc} = i_s$ para o circuito da direita. Assim, $v_s/R = i_s$ para que os dois circuitos sejam equivalentes. Portanto, a transformação de fontes requer que

$$v_s = i_s R \qquad \text{ou} \qquad i_s = \frac{v_s}{R} \tag{4.5}$$

A transformação de fontes também se aplica a fontes dependentes, desde que tratemos adequadamente a variável dependente. Como mostrado na Figura 4.16, uma fonte de tensão dependente em série com um resistor pode ser transformada em uma fonte de corrente dependente em paralelo com o resistor, ou vice-versa, em que garantimos que a Equação (4.5) seja satisfeita.

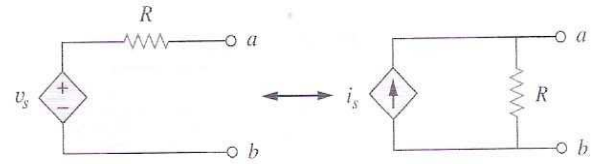


Figura 4.16 Transformação de fontes dependentes.

Assim como na transformação estrela-triângulo estudada no Capítulo 2, uma transformação de fontes não afeta a parte remanescente do circuito. Quando aplicável, essa transformação é uma poderosa ferramenta que possibilita manipulações

de circuitos para facilitar a análise deles. Entretanto, devemos ter as seguintes questões em mente ao lidarmos com transformação de fontes.

1. Observe, na Figura 4.15 (ou Figura 4.16), que as setas da fonte de corrente estão voltadas para o polo positivo da fonte de tensão.
2. Note, na Equação 4.5, que a transformação de fontes não é possível quando $R = 0$, que é o caso de uma fonte de tensão ideal. Entretanto, para uma fonte de tensão não ideal, $R \neq 0$. De forma similar, uma fonte de corrente ideal com $R = \infty$ não pode ser substituída por uma fonte de tensão. Falaremos mais sobre fontes de tensão ideal e não ideal na Seção 4.10.1.

EXEMPLO 4.6

Use transformação de fontes para determinar v_o no circuito da Figura 4.17.

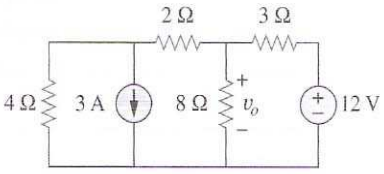


Figura 4.17 Esquema para o Exemplo 4.6.

Solução: Primeiro, transformamos as fontes de tensão e de corrente para obter o circuito da Figura 4.18*a*. Associando em série os resistores de 4 Ω e de 2 Ω e transformando a fonte de tensão de 12 V, obtemos a Figura 4.18*b*. Agora, associamos em paralelo os resistores de 3 Ω e de 6 Ω para obter 2 Ω. Também, associamos as fontes de corrente de 2 A e de 4 A para obter uma fonte de 2 A. Portanto, aplicando transformações repetidamente, obtemos o circuito da Figura 4.18*c*.

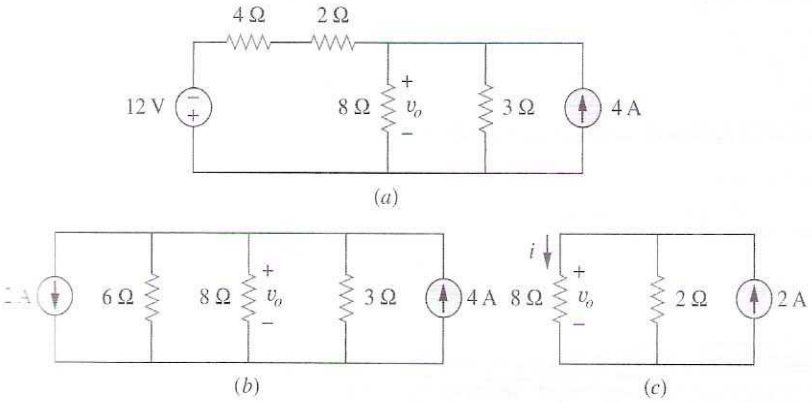


Figura 4.18 Esquema para o Exemplo 4.6.

Usamos divisão de corrente na Figura 4.18*c* para obter

$$i = \frac{2}{2 + 8}(2) = 0{,}4 \text{ A}$$

$$v_o = 8i = 8(0{,}4) = 3{,}2 \text{ V}$$

De forma alternativa, já que os resistores de 8 Ω e de 2 Ω da Figura 4.18*c* estão em paralelo, eles possuem a mesma tensão v_o. Portanto,

$$v_o = (8 \parallel 2)(2 \text{ A}) = \frac{8 \times 2}{10}(2) = 3{,}2 \text{ V}$$

PROBLEMA PRÁTICO 4.6

Determine i_o no circuito da Figura 4.19 usando transformação de fontes.

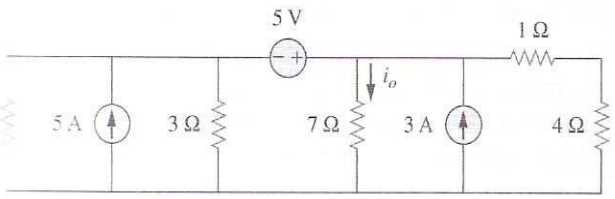


Figura 4.19 Esquema para o Problema prático 4.6.

Resposta: 1,5 A.

EXEMPLO 4.7

Determine v_x na Figura 4.20 usando transformação de fontes.

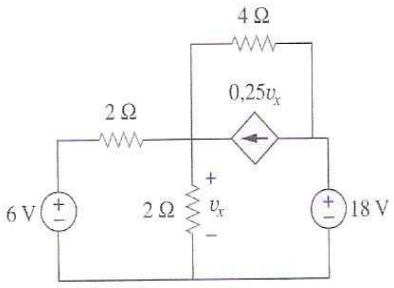


Figura 4.20 Esquema para o Exemplo 4.7.

Solução: O circuito da Figura 4.20 envolve uma fonte de corrente dependente controlada por tensão. Transformamos a fonte de corrente dependentes bem como a fonte de tensão independente de 6 V, conforme pode ser visto na Figura 4.21*a*. A fonte de tensão de 18 V não é transformada, pois não está associada em série com nenhum resistor. Os dois resistores de 2 Ω em paralelo são associados obtendo-se um resistor de 1 Ω, que está em paralelo com a fonte de corrente de 3 A. A fonte de corrente é transformada em uma fonte de tensão, conforme mostrado na Figura 4.21*b*. Observe que os terminais de v_x estão intactos. Aplicando a LKT ao laço da Figura 4.21*b*, obtemos

$$-3 + 5i + v_x + 18 = 0 \tag{4.7.1}$$

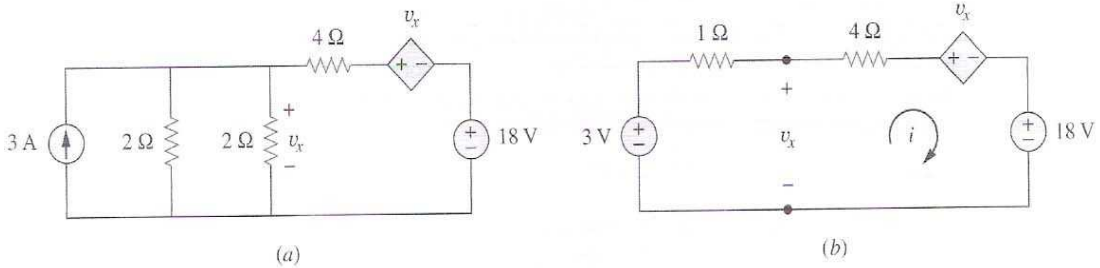


Figura 4.21 Esquema para o Exemplo 4.7: Aplicando a transformação de fontes ao circuito da Figura 4.20.

Aplicando a lei das malhas ao laço contendo apenas a fonte de tensão de 3 V, o resistor de 1 Ω e v_x nos conduz a

$$-3 + 1i + v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = 3 - i \tag{4.7.2}$$

Substituindo esse resultado na Equação (4.7.1), obtemos

$$15 + 5i + 3 - i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = -4{,}5 \text{ A}$$

De modo alternativo, podemos aplicar a LKT ao laço contendo v_x, o resistor de 4 Ω, a fonte de tensão dependente controlada por tensão e a fonte de tensão de 18 V da Figura 4.21*b*. Obtemos

$$-v_x + 4i + v_x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = -4{,}5 \text{ A}$$

Consequentemente, $v_x = 3 - i = 7{,}5$ V.

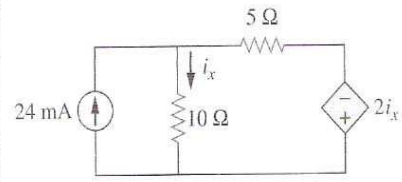


Figura 4.22 Esquema para o Problema prático 4.7.

PROBLEMA PRÁTICO 4.7

Use transformação de fontes para determinar i_x no circuito exposto na Figura 4.22.

Resposta: 7,059 mA.

4.5 Teorema de Thévenin

Na prática, muitas vezes pode acontecer de um determinado elemento em um circuito ser variável (normalmente, denominado *carga*), enquanto outros elementos são fixos. Como exemplo característico, temos uma tomada de uma residência onde se pode conectar diferentes aparelhos, constituindo em uma carga variável. Cada vez que o elemento variável for alterado, todo o circuito tem de ser analisado por completo novamente. Para evitar esse problema, o teorema de Thévenin fornece uma técnica pela qual a parte fixa do circuito é substituída por um circuito equivalente.

De acordo com esse teorema, o circuito linear da Figura 4.23*a* pode ser substituído pelo circuito da Figura 4.23*b*. (A carga na Figura 4.23 pode ser um simples resistor ou um circuito qualquer.) O circuito à esquerda dos terminais *a-b* na Figura 4.23*b* é conhecido como *circuito equivalente de Thévenin*; ele foi desenvolvido em 1883 por M. Leon Thévenin (1857-1926), engenheiro de telégrafo francês.

O teorema de Thévenin afirma que um circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente formado por uma fonte de tensão V_{Th} em série com um resistor R_{Th}, onde V_{Th} é a tensão de circuito aberto nos terminais e R_{Th}, a resistência de entrada ou equivalente nos terminais quando as fontes independentes forem desativadas.

A comprovação do teorema será dada posteriormente, na Seção 4.7. Nossa principal preocupação no momento é como encontrar a tensão equivalente de Thévenin V_{Th} e a resistência equivalente de Thévenin R_{Th}. Para tanto, suponha que os dois circuitos da Figura 4.23 sejam equivalentes – dois circuitos são ditos *equivalentes* se tiverem a mesma relação tensão-corrente em seus terminais. Vejamos o que tornará os dois circuitos da Figura 4.23 equivalentes. Se os terminais *a-b* forem tornados um circuito aberto (eliminando-se a carga), nenhuma corrente fluirá e, portanto, a tensão nos terminais *a-b* da Figura 4.23*a* terá de ser igual à fonte de tensão V_{Th} da Figura 4.23*b*, já que os dois circuitos são equivalentes. Logo, V_{Th} é a tensão de circuito aberto nos terminais, conforme ilustrado na Figura 4.24*a*; ou seja,

$$V_{Th} = v_{oc} \tag{4.6}$$

Enfatizando, com a carga desconectada e os terminais em circuito aberto, desligamos todas as fontes independentes. A resistência de entrada (ou resistência equivalente) do circuito inativo nos terminais *a-b* da Figura 4.23*a* deve ser igual a R_{Th} da Figura 4.23*b*, pois os dois circuitos são equivalentes. Portanto, R_{Th} é a resistência de entrada nos terminais quando as fontes independentes forem desligadas, como pode ser observado na Figura 4.24*b*; ou seja,

$$R_{Th} = R_{ent} \tag{4.7}$$

Para aplicar esse conceito na determinação da resistência equivalente de Thévenin R_{Th}, precisamos considerar dois casos.

■ **CASO 1** Se a rede não tiver fontes dependentes, desligamos todas as fontes independentes. R_{Th} é a resistência de entrada da rede, olhando-se entre os terminais *a* e *b*, como ilustrado na Figura 4.24*b*.

■ **CASO 2** Se a rede tiver fontes dependentes, desligamos todas as fontes independentes. Pelo teorema da superposição, as fontes dependentes não devem ser desligadas, pois elas são controladas por variáveis de circuito. Aplicamos uma tensão v_o aos terminais *a* e *b*, e determinamos a corrente resultante i_o. Então, $R_{Th} = v_o/i_o$, conforme mostra a Figura 4.25*a*. De forma alternativa, poderíamos inserir uma fonte de corrente i_o nos terminais *a* e *b*, como na Figura 4.25*b*, e encontrar a tensão entre os terminais v_o. Chegamos novamente a $R_{Th} = v_o/i_o$. Qualquer um dos dois métodos leva ao mesmo resultado. Em ambos os métodos, podemos supor qualquer valor de v_o e i_o. Poderíamos usar, por exemplo, $v_o = 1$ V ou $i_o = 1$ A, ou até mesmo valores não especificados de v_o ou i_o.

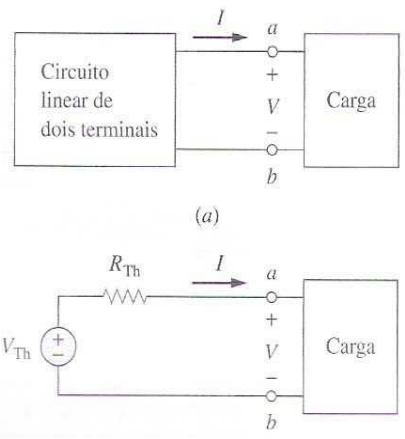


Figura 4.23 Substituição de um circuito linear de dois terminais por seu equivalente de Thévenin: (*a*) circuito original; (*b*) circuito equivalente de Thévenin.

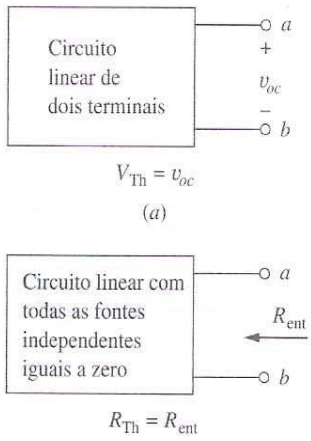


Figura 4.24 Determinando V_{Th} e R_{Th}.

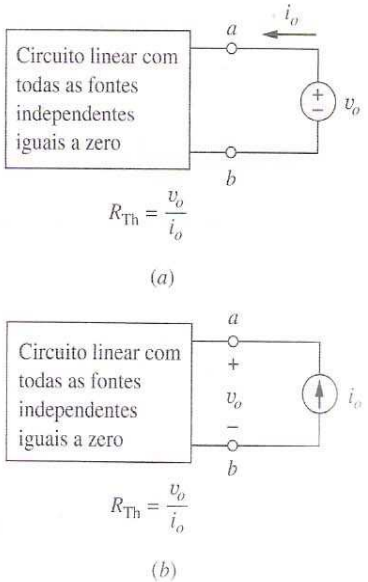


Figura 4.25 Determinando R_{Th} quando o circuito tem fontes dependentes.

Mais tarde, veremos que uma outra maneira de se determinar R_{Th} é $R_{Th} = v_{OC}/i_{SC}$.

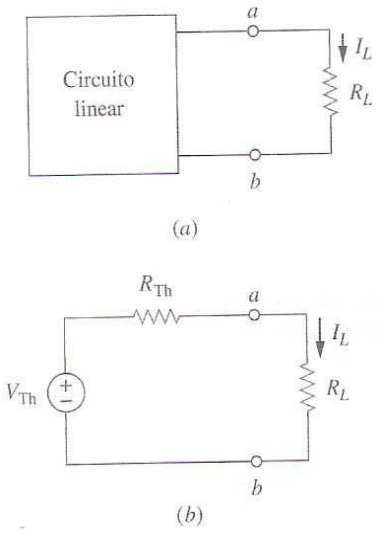


Figura 4.26 Um circuito com uma carga: (*a*) circuito original; (*b*) circuito equivalente de Thévenin.

Muitas vezes, pode ocorrer de R_{Th} assumir um valor negativo; nesse caso, a resistência negativa ($v = -iR$) implica o fato de o circuito estar fornecendo energia. Isso é possível em um circuito com fontes dependentes, o que será ilustrado pelo Exemplo 4.10.

O teorema de Thévenin é muito importante na análise de circuitos, porque ajuda a simplificar um circuito, e um circuito grande pode ser substituído por uma única fonte de tensão independente e um único resistor. Essa técnica de substituição é uma poderosa ferramenta no projeto de circuitos.

Como mencionado, um circuito linear com uma carga variável pode ser substituído pelo equivalente de Thévenin, excluindo-se a carga. A rede equivalente se comporta externamente da mesma maneira que o circuito original. Consideremos um circuito linear terminado por uma carga R_L, conforme mostra a Figura 4.26*a*. A corrente I_L através da carga e a tensão V_L na carga são facilmente determinadas, uma vez que seja obtido o circuito equivalente de Thévenin nos terminais da carga, conforme ilustrado na Figura 4.26*b*. Dessa figura, obtemos

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \tag{4.8a}$$

$$V_L = R_L I_L = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} V_{Th} \tag{4.8b}$$

Observe na Figura 4.26*b* que o equivalente de Thévenin é um simples divisor de tensão, nos levando a V_L por mera inspeção.

EXEMPLO 4.8

Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito mostrado na Figura 4.27, à esquerda dos terminais *a*-*b*. Em seguida, determine a corrente através de $R_L = 6\ \Omega$, $16\ \Omega$ e $36\ \Omega$.

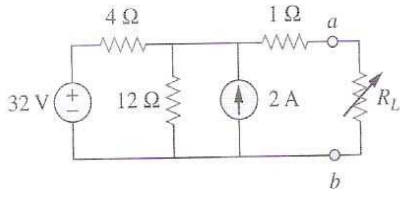


Figura 4.27 Esquema para o Exemplo 4.8.

Solução: Determinamos R_{Th} desativando a fonte de 32 V (substituindo-a por um curto-circuito) e a fonte de corrente de 2 A (substituindo-a por um circuito aberto). O circuito se torna aquele mostrado na Figura 4.28*a*.

Portanto,

$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4\ \Omega$$

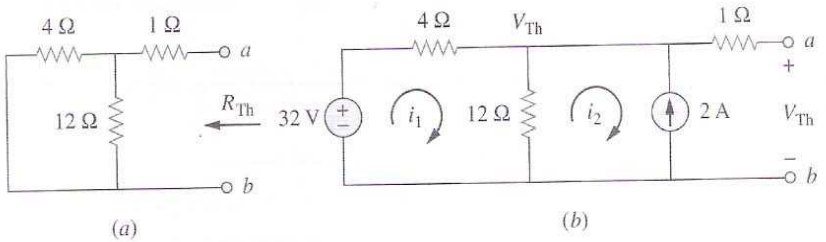


Figura 4.28 Esquema para o Exemplo 4.8: (*a*) determinando R_{Th}; (*b*) determinando V_{Th}.

Para determinar V_{Th}, consideremos o circuito da Figura 4.28*b*. Aplicando a análise de malhas aos dois laços, obtemos

$$-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0, \qquad i_2 = -2\ \text{A}$$

Calculando i_1, obtemos $i_1 = 0{,}5$ A. Portanto,

$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12(0{,}5 + 2{,}0) = 30\ \text{V}$$

Alternativamente, é até mais fácil usar análise nodal. Ignoramos o resistor de 1 Ω já que nenhuma corrente passa por ele. No nó superior, a LKC nos dá

$$\frac{32 - V_{\text{Th}}}{4} + 2 = \frac{V_{\text{Th}}}{12}$$

ou

$$96 - 3V_{\text{Th}} + 24 = V_{\text{Th}} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Th}} = 30 \text{ V}$$

como havíamos obtido anteriormente. Também poderíamos usar transformação de fontes para descobrir V_{Th}.

O circuito equivalente de Thévenin é mostrado na Figura 4.29. A corrente que passa por R_L é

$$I_L = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$

Quando $R_L = 6$,

$$I_L = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

Quando $R_L = 16$,

$$I_L = \frac{30}{20} = 1{,}5 \text{ A}$$

Quando $R_L = 36$,

$$I_L = \frac{30}{40} = 0{,}75 \text{ A}$$

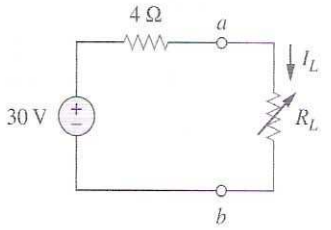


Figura 4.29 O circuito equivalente de Thévenin para o Exemplo 4.8.

PROBLEMA PRÁTICO 4.8

Usando o teorema de Thévenin, determine o circuito equivalente à esquerda dos terminais do circuito da Figura 4.30. Em seguida, determine I.

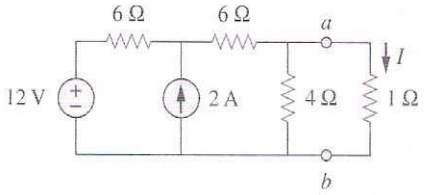


Figura 4.30 Esquema para o Problema prático 4.8.

Resposta: $V_{\text{Th}} = 6$ V, $R_{\text{Th}} = 3\ \Omega$, $I = 1{,}5$ A.

EXEMPLO 4.9

Determine o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 4.31.

Solução: Esse circuito contém uma fonte dependente, diferentemente do circuito do exemplo anterior. Para determinar R_{Th}, fazemos que a fonte independente seja igual a zero, porém não tocamos na fonte dependente. Entretanto, em virtude da presença da fonte dependente, excitamos a rede com a fonte de tensão v_o conectada aos terminais, conforme indicado na Figura 4.32*a*. Poderemos fazer que $v_o = 1$ V para facilitar os cálculos, já que o circuito é linear. Nosso objetivo é determinar a corrente i_o por meio dos terminais e então obter. (De forma alternativa, poderíamos inserir uma fonte de corrente de 1 A, encontrar $R_{\text{Th}} = 1/i_o$ a tensão v_o correspondente e então obter $R_{\text{Th}} = v_o/1$.)

Aplicando análise de malhas ao laço 1 do circuito da Figura 4.32*a*, temos

$$-2v_x + 2(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{ou} \quad v_x = i_1 - i_2$$

Porém, $-4i_2 = v_x = i_1 - i_2$; portanto,

$$i_1 = -3i_2 \tag{4.9.1}$$

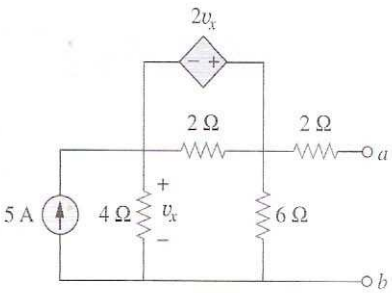


Figura 4.31 Esquema para o Exemplo 4.9.

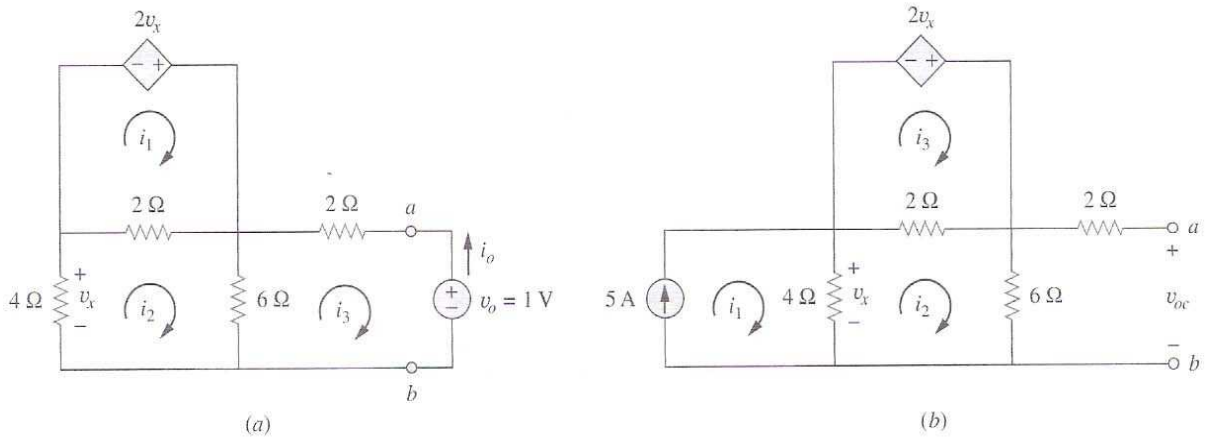


Figura 4.32 Determinando R_{Th} e V_{Th} para o Exemplo 4.9.

Para os laços 2 e 3, aplicando a LKT resulta em

$$4i_2 + 2(i_2 - i_1) + 6(i_2 - i_3) = 0 \tag{4.9.2}$$

$$6(i_3 - i_2) + 2i_3 + 1 = 0 \tag{4.9.3}$$

Resolvendo esse conjunto de equações, obtemos

$$i_3 = -\frac{1}{6}\text{ A}$$

Porém, $i_o = -i_3 = 1/6$ A. Logo,

$$R_{Th} = \frac{1\text{ V}}{i_o} = 6\ \Omega$$

Para obter V_{Th}, determinamos v_{oc} (tensão de circuito aberto) no circuito da Figura 4.32*b*. Aplicando a análise de malhas, obtemos

$$i_1 = 5 \tag{4.9.4}$$

$$\begin{gathered} -2v_x + 2(i_3 - i_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = i_3 - i_2 \\ 4(i_2 - i_1) + 2(i_2 - i_3) + 6i_2 = 0 \end{gathered} \tag{4.9.5}$$

ou

$$12i_2 - 4i_1 - 2i_3 = 0 \tag{4.9.6}$$

Porém, $4(i_1 - i_2) = v_x$. A resolução dessas equações nos leva a $i_2 = 10/3$.

Portanto,

$$V_{Th} = v_{oc} = 6i_2 = 20\text{ V}$$

O circuito equivalente de Thévenin é aquele mostrado na Figura 4.33.

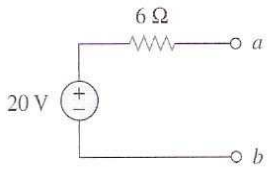


Figura 4.33 O equivalente de Thévenin para o circuito da Figura 4.31.

PROBLEMA PRÁTICO 4.9

Determine o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 4.34 à esquerda dos terminais.

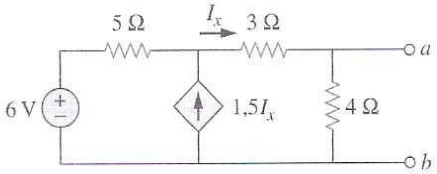


Figura 4.34 Esquema para o Problema prático 4.9.

Resposta: $V_{Th} = 5{,}333$ V, $R_{Th} = 444{,}4$ mΩ.

EXEMPLO 4.10

Determine o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 4.35*a* nos terminais *a*-*b*.

Solução:

1. ***Definição.*** O problema está definido de forma clara; devemos determinar o equivalente de Thévenin do circuito mostrado na Figura 4.35*a*.

2. ***Apresentação.*** O circuito contém um resistor de 2 Ω em paralelo com um resistor de 4 Ω. Estes, por sua vez, estão em paralelo com uma fonte de corrente dependente. É importante notar que não existe nenhuma fonte independente.

3. ***Alternativa.*** O primeiro fato a ser considerado é que, uma vez que não há nenhuma fonte independente nesse circuito, temos de excitar o circuito externamente. Além disso, quando não há nenhuma fonte independente, não teremos um valor para V_{Th}; teremos de encontrar apenas R_{Th}.

   A forma mais simples é excitar o circuito com uma fonte de tensão de 1 V ou uma fonte de corrente de 1 A. Já que no final das contas o resultado será uma resistência equivalente (positiva ou negativa), prefiro usar a fonte de corrente e a análise nodal que conduzirá a uma tensão nos terminais de saída igual à resistência (com 1 A fluindo em v_o, esta será igual a 1 vez a resistência equivalente).

   Como forma alternativa, o circuito também poderia ser excitado por uma fonte de tensão de 1 V e usada a análise de malhas para encontrar a resistência equivalente.

4. ***Tentativa.*** Iniciamos escrevendo a equação nodal em *a* na Figura 4.35*b*, supondo $i_o = 1$ A.

$$2i_x + (v_o - 0)/4 + (v_o - 0)/2 + (-1) = 0 \qquad \textbf{(4.10.1)}$$

   Uma vez que temos duas incógnitas e apenas uma equação, precisaremos

$$i_x = (0 - v_o)/2 = -v_o/2 \qquad \textbf{(4.10.2)}$$

   Substituindo a Equação (4.10.2) na Equação (4.10.1), temos

$$2(-v_o/2) + (v_o - 0)/4 + (v_o - 0)/2 + (-1) = 0$$
$$= (-1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2})v_o - 1 \quad \text{ou} \quad v_o = -4 \text{ V}$$

   Já que $v_o = 1 \times R_{Th}$, então $R_{Th} = v_o/1 = -4\ \Omega$.

   O valor negativo da resistência nos informa que, de acordo com a regra dos sinais (passivo), o circuito da Figura 4.35*a* está fornecendo tensão. Obviamente, os resistores da Figura 4.35*a* não são capazes de fornecer tensão (eles a absorvem); é a fonte dependente que fornece tensão. Este é um exemplo de como uma fonte dependente e resistores poderiam ser usados para simular uma resistência negativa.

5. ***Avaliação.*** Antes de qualquer coisa, notamos que a resposta é um valor negativo. Sabemos que isso não é possível em um circuito passivo, porém, nesse circuito, não temos um dispositivo ativo (a fonte de corrente dependente). Portanto, o circuito equivalente é basicamente um circuito ativo capaz de fornecer energia.

   Agora, temos de avaliar a solução. A melhor maneira de se fazer isso é realizar uma verificação, usando um método diferente, e ver se o resultado obtido é o mesmo. Tentemos conectar um resistor de 9 Ω em série com uma fonte de tensão de 10 V nos terminais de saída do circuito original e, em seguida, o equivalente de Thévenin. Para tornar o circuito mais fácil de ser solucionado, podemos pegar e transformar a fonte de corrente em paralelo com o resistor de 4 Ω em uma fonte de tensão em série com o resistor de 4 Ω usando transformação de fontes. Isso, com a nova carga, nos fornece o circuito mostrado na Figura 4.35*c*.

   Agora, podemos escrever as duas equações de malha.

$$8i_x + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) = 0$$
$$2(i_2 - i_1) + 9i_2 + 10 = 0$$

   Note que temos apenas duas equações, porém três incógnitas e, portanto, precisamos de uma equação de restrição. Podemos usar

$$i_x = i_2 - i_1$$

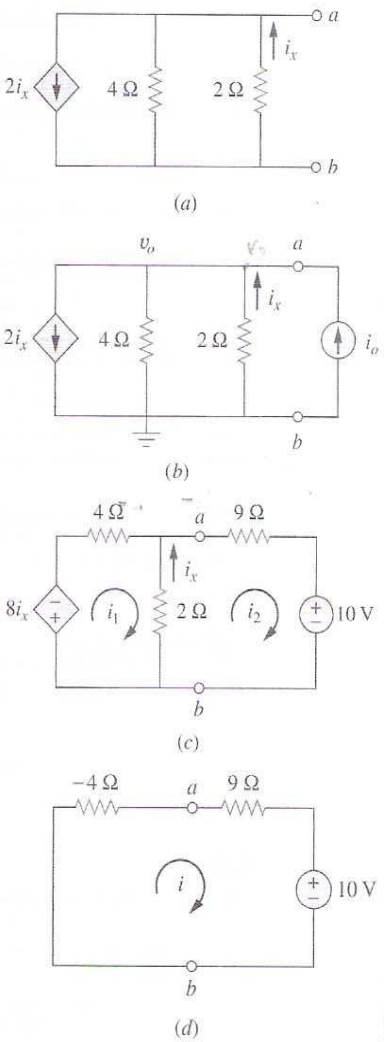


Figura 4.35 Esquema para o Exemplo 4.10.

Isso nos leva a uma nova equação para o laço 1. Simplificando, resulta em

$$(4 + 2 - 8)i_1 + (-2 + 8)i_2 = 0$$

ou

$$-2i_1 + 6i_2 = 0 \quad \text{ou} \quad i_1 = 3i_2$$
$$-2i_1 + 11i_2 = -10$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos

$$-6i_2 + 11i_2 = -10 \quad \text{ou} \quad i_2 = -10/5 = -2\,\text{A}$$

Usar o equivalente de Thévenin é bem fácil, uma vez que temos apenas um laço, conforme indicado na Figura 4.35*d*.

$$-4i + 9i + 10 = 0 \quad \text{ou} \quad i = -10/5 = -2\,\text{A}$$

6. ***Satisfatório?*** Está claro que determinamos o valor do circuito equivalente, conforme solicitado pelo enunciado do problema. A verificação valida essa solução (comparamos a resposta obtida por meio de circuito equivalente com aquela obtida usando-se a carga com o circuito original). Podemos apresentar tudo isso como uma solução para o problema.

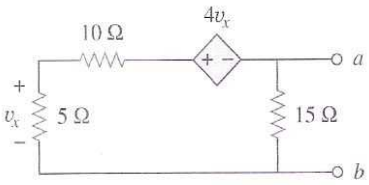


Figura 4.36 Esquema para o Problema prático 4.10.

PROBLEMA PRÁTICO 4.10

Obtenha o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 4.36.

Resposta: $V_{\text{Th}} = 0\,\text{V}$, $R_{\text{Th}} = -7{,}5\,\Omega$.

4.6 Teorema de Norton

Em 1926, após cerca de 43 anos da publicação do teorema de Thévenin, E. L. Norton, engenheiro norte-americano da Bell Telephone Laboratories, propôs um teorema semelhante.

O **teorema de Norton** afirma que um circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente formado por uma fonte de corrente I_N em paralelo com um resistor R_N, em que I_N é a corrente de curto-circuito através dos terminais e R_N é a resistência de entrada ou equivalente nos terminais quando as fontes independentes forem desligadas.

Portanto, o circuito da Figura 4.37*a* pode ser substituído por aquele da Figura 4.37*b*.

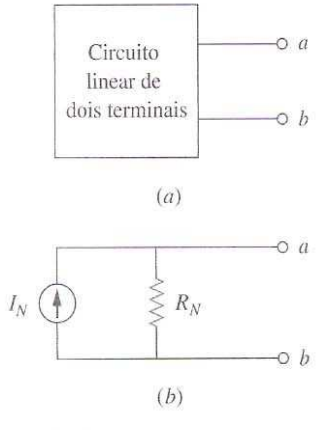


Figura 4.37 (*a*) Circuito original; (*b*) circuito equivalente de Norton.

A prova do teorema de Norton será dada na seção seguinte. Por enquanto, estamos basicamente interessados em como obter R_N e I_N. Determinamos R_N da mesma maneira que o fazemos para R_{Th}. De fato, do que sabemos sobre a transformação de fontes, as resistências de Thévenin e de Norton são iguais; isto é,

$$R_N = R_{\text{Th}} \tag{4.9}$$

Para descobrir a corrente I_N de Norton, determinamos a corrente de curto-circuito que flui entre os terminais a e b em ambos os circuitos da Figura 4.37. É evidente que a corrente de curto-circuito na Figura 4.37*b* é I_N. Esta tem de ser igual à corrente de curto-circuito entre os terminais a e b da Figura 4.37*a*, uma vez que as duas correntes são equivalentes. Portanto,

$$I_N = i_{sc} \tag{4.10}$$

mostrado na Figura 4.38. As fontes dependentes e independentes são tratadas da mesma forma que no teorema de Thévenin.

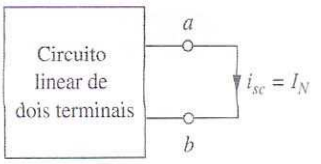


Figura 4.38 Encontrando a corrente de Norton I_N.

Observe a estreita relação entre os dois teoremas: $R_N = R_{\text{Th}}$ como na Equação (4.9) e

$$I_N = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} \tag{4.11}$$

Isso é, basicamente, transformação de fontes. Por essa razão, a transformação de fontes é muitas vezes chamada transformação Thévenin-Norton.

Os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton estão relacionados por uma transformação de fontes.

Uma vez que V_{Th}, I_N e R_{Th} estão relacionadas de acordo com a Equação (4.11), determinar o circuito equivalente de Thévenin e de Norton requer que encontremos:

- A tensão de circuito aberto, v_{oc}, entre os terminais a e b.
- A corrente de curto-circuito, i_{sc}, nos terminais a e b.
- A resistência de entrada ou equivalente, R_{ent}, nos terminais a e b quando todas as fontes independentes estiverem desligadas.

Podemos calcular quaisquer dois desses três itens usando o método mais fácil e então usá-los para obter o terceiro item por meio da lei de Ohm. O Exemplo 4.11 ilustrará isso. Da mesma forma, já que

$$V_{\text{Th}} = v_{oc} \tag{4.12a}$$

$$I_N = i_{sc} \tag{4.12b}$$

$$R_{\text{Th}} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = R_N \tag{4.12c}$$

os testes de circuito aberto e de curto-circuito são suficientes para encontrar qualquer circuito equivalente de Thévenin ou de Norton, de um circuito contendo pelo menos uma fonte independente.

EXEMPLO 4.11

Determine o circuito equivalente de Norton do circuito da Figura 4.39 nos terminais a-b.

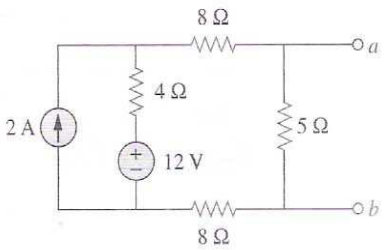


Figura 4.39 Esquema para o Exemplo 4.11.

Solução: Determinamos R_N da mesma forma que R_{Th} no circuito equivalente de Thévenin. Faça que as fontes independentes sejam iguais a zero. Isso leva ao circuito da Figura 4.40*a*, a partir do qual achamos R_N. Portanto,

$$R_N = 5 \,\|\, (8 + 4 + 8) = 5 \,\|\, 20 = \frac{20 \times 5}{25} = 4\ \Omega$$

Para encontrar I_N, curto-circuitamos os terminais a e b, conforme mostrado na Figura 4.40*b*. Ignoramos o resistor de 5 Ω, pois ele foi curto-circuitado. Aplicando-se a análise de malhas, obtemos

$$i_1 = 2\ \text{A}, \qquad 20i_2 - 4i_1 - 12 = 0$$

A partir dessas equações, obtemos

$$i_2 = 1\ \text{A} = i_{sc} = I_N$$

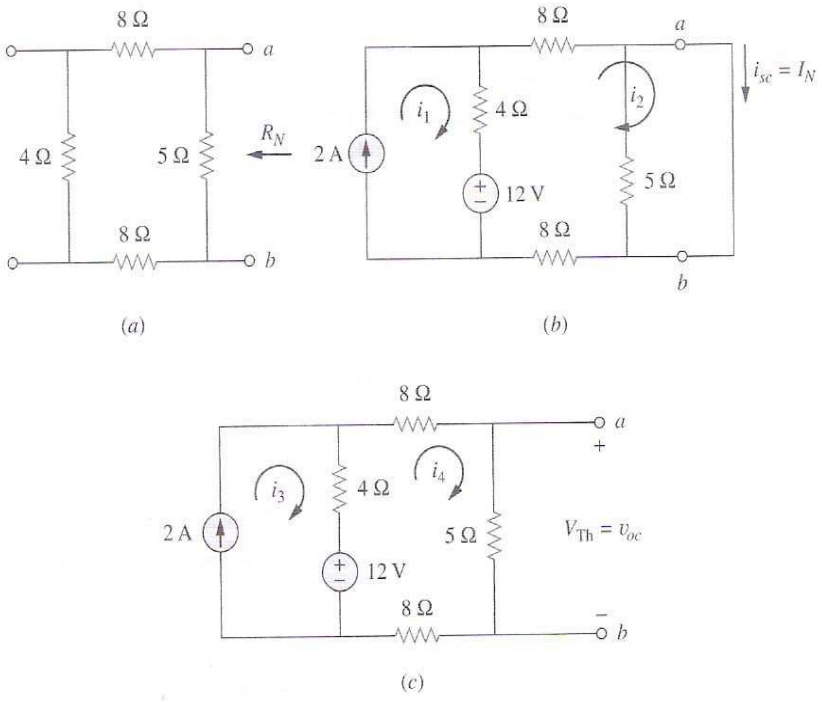


Figura 4.40 Esquema para o Exemplo 4.11, determinamos: (*a*) R_N; (*b*) $I_N = i_{sc}$; (*c*) $V_{Th} = v_{oc}$.

De forma alternativa, poderíamos determinar I_N a partir de V_{Th}/R_{Th}. Obtemos V_{Th} como a tensão de circuito aberto entre os terminais *a* e *b* na Figura 4.40*c*. Usando análise de malhas, obtemos

$$i_3 = 2 \text{ A}$$

$$25i_4 - 4i_3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 = 0{,}8 \text{ A}$$

e

$$v_{oc} = V_{Th} = 5i_4 = 4 \text{ V}$$

Portanto,

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4}{4} = 1 \text{ A}$$

como obtido anteriormente. Isso também serve para confirmar a Equação (4.12*c*) que $R_{Th} = v_{oc}/i_{sc} = 4/1 = 4\ \Omega$. Consequentemente, o circuito equivalente de Norton é igual ao mostrado na Figura 4.41.

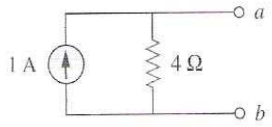


Figura 4.41 Equivalente de Norton do circuito da Figura 4.39.

PROBLEMA PRÁTICO 4.11

Determine o equivalente de Norton para o circuito da Figura 4.42 nos terminais *a*-*b*.

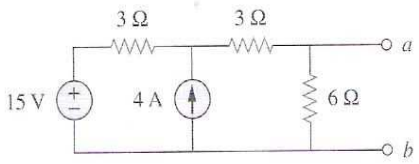


Figura 4.42 Esquema para o Problema prático 4.11.

Resposta: $R_N = 3\Omega$, $I_N = 4{,}5$ A.

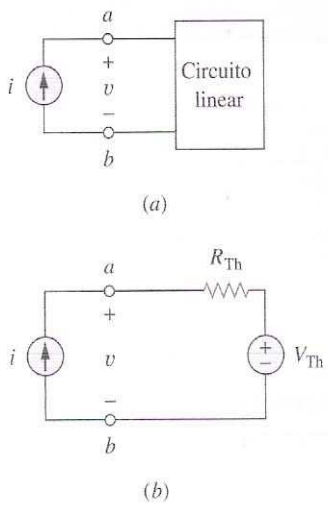


Figura 4.46 Dedução do circuito equivalente de Thévenin: (*a*) um circuito alimentado por corrente; (*b*) seu equivalente de Thévenin.

através dos terminais *a* e *b*, por meio dos quais a corrente de uma fonte externa é aplicada. Nosso objetivo é garantir que a relação tensão-corrente nesses terminais *a* e *b* seja idêntica àquela do circuito equivalente de Thévenin na Figura 4.46*b*. Para fins de simplicidade, vamos supor que o circuito dessa figura contenha duas fontes de tensão independentes v_{s1} e v_{s2} e duas fontes de corrente i_{s1} e i_{s2}; poderíamos obter qualquer variável de circuito, como a tensão v nos terminais, aplicando-se superposição, isto é, consideramos a contribuição em virtude de cada uma das fontes independentes, inclusive a fonte externa i. Pelo princípio da superposição, a tensão v nos terminais é

$$v = A_0 i + A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2} \tag{4.13}$$

onde A_0, A_1, A_2, A_3e A_4 são constantes. Cada termo do lado direito da Equação (4.13) é a contribuição da fonte independente relativa; isto é, $A_0 i$ é a contribuição de v em razão da fonte de corrente externa i, $A_1 v_{s1}$ é a contribuição em decorrência da tensão v_{s1} e assim por diante. Poderíamos reunir os termos para as fontes independentes internas como B_0, de modo que a Equação (4.13) fique

$$v = A_0 i + B_0 \tag{4.14}$$

onde $B_0 = A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2}$. Agora, queremos avaliar os valores das constantes A_0 e B_0. Quando os terminais *a* e *b* estiverem em circuito aberto, $i = 0$ e $v = B_0$. Portanto, B_0 é a tensão de circuito aberto, v_{oc}, que é a mesma que V_{Th}, portanto

$$B_0 = V_{Th} \tag{4.15}$$

Quando todas as fontes internas são desligadas, $B_0 = 0$. O circuito pode ser substituído por uma resistência equivalente, R_{eq}, que é a mesma que R_{Th}, e a Equação (4.14) fica

$$v = A_0 i = R_{Th} i \quad \Rightarrow \quad A_0 = R_{Th} \tag{4.16}$$

Substituindo os valores de A_0 e B_0 na Equação (4.14), dá

$$v = R_{Th} i + V_{Th} \tag{4.17}$$

que expressa a relação tensão-corrente nos terminais *a* e *b* do circuito da Figura 4.46*b*. Portanto, os dois circuitos das Figuras 4.46*a* e 4.46*b* são equivalentes.

Quando o mesmo circuito linear for alimentado por uma fonte de tensão v, como mostrado na Figura 4.47*a*, a corrente fluindo no circuito pode ser obtida por superposição como

$$i = C_0 v + D_0 \tag{4.18}$$

onde $C_0 v$ é a contribuição para i em consequência da fonte de tensão v, e D_0 contém a contribuição para i por causa de todas as fontes independentes internas. Quando os terminais *a*-*b* forem curto-circuitados, $v = 0$, de modo que $i = D_0 = -i_{sc}$, onde i_{sc} é a corrente de curto-circuito que sai do terminal *a*, que é a mesma que a corrente de Norton, I_N, isto é,

$$D_0 = -I_N \tag{4.19}$$

Quando todas as fontes independentes internas forem desligadas, $D_0 = 0$ e o circuito pode ser substituído por uma resistência equivalente R_{eq} (ou uma condutância equivalente $G_{eq} = 1/R_{eq}$), que é a mesma que R_{Th} ou R_N. Portanto, a Equação (4.19) fica

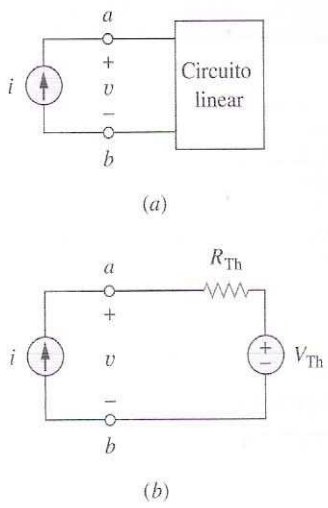


Figura 4.46 Dedução do circuito equivalente de Thévenin: (*a*) um circuito alimentado por corrente; (*b*) seu equivalente de Thévenin.

através dos terminais *a* e *b*, por meio dos quais a corrente de uma fonte externa é aplicada. Nosso objetivo é garantir que a relação tensão-corrente nesses terminais *a* e *b* seja idêntica àquela do circuito equivalente de Thévenin na Figura 4.46*b*. Para fins de simplicidade, vamos supor que o circuito dessa figura contenha duas fontes de tensão independentes v_{s1} e v_{s2} e duas fontes de corrente i_{s1} e i_{s2}; poderíamos obter qualquer variável de circuito, como a tensão v nos terminais, aplicando-se superposição, isto é, consideramos a contribuição em virtude de cada uma das fontes independentes, inclusive a fonte externa i. Pelo princípio da superposição, a tensão v nos terminais é

$$v = A_0 i + A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2} \tag{4.13}$$

onde A_0, A_1, A_2, A_3e A_4 são constantes. Cada termo do lado direito da Equação (4.13) é a contribuição da fonte independente relativa; isto é, $A_0 i$ é a contribuição de v em razão da fonte de corrente externa i, $A_1 v_{s1}$ é a contribuição em decorrência da tensão v_{s1} e assim por diante. Poderíamos reunir os termos para as fontes independentes internas como B_0, de modo que a Equação (4.13) fique

$$v = A_0 i + B_0 \tag{4.14}$$

onde $B_0 = A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2}$. Agora, queremos avaliar os valores das constantes A_0 e B_0. Quando os terminais *a* e *b* estiverem em circuito aberto, $i = 0$ e $v = B_0$. Portanto, B_0 é a tensão de circuito aberto, v_{oc}, que é a mesma que V_{Th}, portanto

$$B_0 = V_{Th} \tag{4.15}$$

Quando todas as fontes internas são desligadas, $B_0 = 0$. O circuito pode ser substituído por uma resistência equivalente, R_{eq}, que é a mesma que R_{Th}, e a Equação (4.14) fica

$$v = A_0 i = R_{Th} i \quad \Rightarrow \quad A_0 = R_{Th} \tag{4.16}$$

Substituindo os valores de A_0 e B_0 na Equação (4.14), dá

$$v = R_{Th} i + V_{Th} \tag{4.17}$$

que expressa a relação tensão-corrente nos terminais *a* e *b* do circuito da Figura 4.46*b*. Portanto, os dois circuitos das Figuras 4.46*a* e 4.46*b* são equivalentes.

Quando o mesmo circuito linear for alimentado por uma fonte de tensão v, como mostrado na Figura 4.47*a*, a corrente fluindo no circuito pode ser obtida por superposição como

$$i = C_0 v + D_0 \tag{4.18}$$

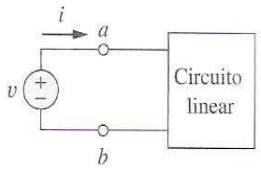
onde $C_0 v$ é a contribuição para i em consequência da fonte de tensão v, e D_0 contém a contribuição para i por causa de todas as fontes independentes internas. Quando os terminais *a*-*b* forem curto-circuitados, $v = 0$, de modo que $i = D_0 = -i_{sc}$, onde i_{sc} é a corrente de curto-circuito que sai do terminal *a*, que é a mesma que a corrente de Norton, I_N, isto é,

$$D_0 = -I_N \tag{4.19}$$

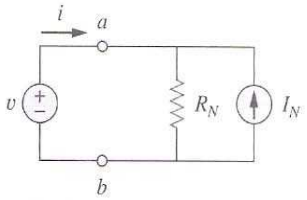
Quando todas as fontes independentes internas forem desligadas, $D_0 = 0$ e o circuito pode ser substituído por uma resistência equivalente R_{eq} (ou uma condutância equivalente $G_{eq} = 1/R_{eq}$), que é a mesma que R_{Th} ou R_N. Portanto, a Equação (4.19) fica

$$i = \frac{v}{R_{\text{Th}}} - I_N \tag{4.20}$$

Isso expressa a relação tensão-corrente nos terminais *a-b* do circuito da Figura 4.47*b*, confirmando que os dois circuitos das Figuras 4.47*a* e *b* são equivalentes.



(*a*)



(*b*)

Figura 4.47 Dedução do circuito equivalente de Norton: (*a*) um circuito alimentado por tensão; (*b*) o equivalente de Norton.

4.8 Máxima transferência de potência

Em diversas situações práticas, um circuito é projetado para fornecer potência a uma carga. Existem aplicações em áreas como comunicações em que é desejável maximizar a potência liberada a uma carga. Agora, podemos tratar do problema de liberar a potência máxima a uma carga quando um sistema com perdas internas conhecidas for dado. Deve ser notado que isso resultará em perdas internas significativas maiores ou iguais à potência liberada à carga.

O circuito equivalente de Thévenin é útil para descobrir a potência máxima que um circuito linear pode liberar a uma carga. Partimos do pressuposto de que podemos ajustar a resistência de carga R_L. Se todo o circuito for substituído pelo equivalente de Thévenin, exceto a carga, conforme mostra a Figura 4.48, a potência liberada para a carga é

$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L}\right)^2 R_L \tag{4.21}$$

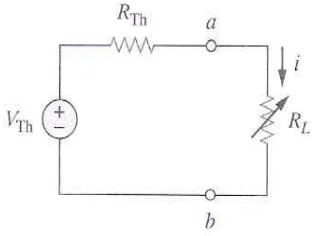


Figura 4.48 O circuito usado para máxima transferência de potência.

Para um dado circuito, V_{Th} e R_{Th} são fixas. Variando a resistência de carga R_L, a potência liberada à carga varia conforme descrito na Figura 4.49. Percebemos, dessa figura, que a potência é pequena para valores pequenos ou grandes de R_L, mas máxima para o mesmo valor de R_L entre 0 e ∞. Agora, queremos mostrar que a potência máxima ocorre quando R_L é igual a R_{Th}. Isso é conhecido como *teorema da potência máxima*.

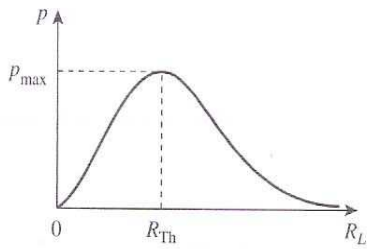


Figura 4.49 Potência liberada para a carga em função de R_L.

A **potência máxima** é transferida a uma carga quando a resistência de carga for igual à resistência de Thévenin quando vista da carga ($R_L = R_{Th}$).

Para provar o teorema da máxima transferência de potência, diferenciamos p na Equação (4.21) em relação a R_L e fazemos que o resultado seja igual a zero. Obtemos

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{\text{Th}}^2 \left[\frac{(R_{\text{Th}} + R_L)^2 - 2R_L(R_{\text{Th}} + R_L)}{(R_{\text{Th}} + R_L)^4}\right]$$

$$= V_{\text{Th}}^2 \left[\frac{(R_{\text{Th}} + R_L - 2R_L)}{(R_{\text{Th}} + R_L)^3}\right] = 0$$

Isso implica que

$$0 = (R_{\text{Th}} + R_L - 2R_L) = (R_{\text{Th}} - R_L) \tag{4.22}$$

que leva a

$$\boxed{R_L = R_{\text{Th}}} \tag{4.23}$$

A fonte e a carga são ditas casadas quando $R_L = R_{Th}$.

mostrando que a máxima transferência de potência ocorre quando a resistência de carga R_L iguala a resistência de Thévenin R_{Th}. Podemos, prontamente, confirmar que a Equação (4.23) fornece a potência máxima, mostrando que $d^2p/dR_L^2 < 0$.

A potência máxima transferida é obtida substituindo a Equação (4.23) na Equação (4.21), para

$$p_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} \tag{4.24}$$

A Equação (4.24) se aplica apenas quando $R_L = R_{Th}$. Quando $R_L \neq R_{Th}$, calculamos a potência liberada para a carga usando a Equação (4.21).

EXEMPLO 4.13

Determine o valor de R_L para a máxima transferência de potência no circuito da Figura 4.50. Determine a potência máxima.

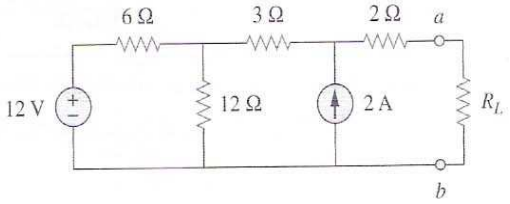


Figura 4.50 Esquema para o Exemplo 4.13.

Solução: Precisamos determinar a resistência de Thévenin R_{Th} e a tensão de Thévenin V_{Th}, entre os terminais a-b. Para obter R_{Th}, usamos o circuito na Figura 4.51a e obtemos

$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \| 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9\ \Omega$$

Para obter V_{Th}, consideramos o circuito da Figura 4.51b. Aplicando análise de malhas,

$$-12 + 18i_1 - 12i_2 = 0, \qquad i_2 = -2\ \text{A}$$

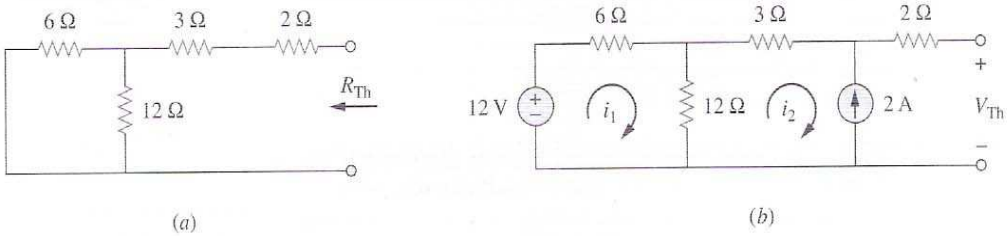


Figura 4.51 Esquema para o Exemplo 4.13: (a) determinando R_{Th}; (b) determinando V_{Th}.

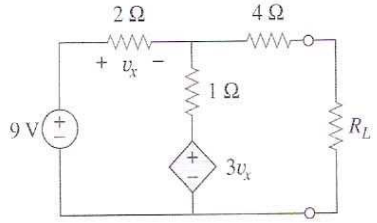


Figura 4.52 Esquema para o Problema prático 4.13.

Calculando i_1, obtemos $i_1 = -2/3$. Aplicando a LKT ao laço externo para obter V_{Th} entre os terminais a-b, obtemos

$$-12 + 6i_1 + 3i_2 + 2(0) + V_{Th} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{Th} = 22\ \text{V}$$

Para máxima transferência de potência,

$$R_L = R_{Th} = 9\ \Omega$$

e a potência máxima é

$$p_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13{,}44\ \text{W}$$

PROBLEMA PRÁTICO 4.13

Determine o valor de R_L que irá drenar a potência máxima do restante do circuito na Figura 4.52. Calcule a potência máxima.

Resposta: 4,222 Ω, 2,901 W.

4.9 Verificação de teoremas de circuitos usando o *PSpice*

Aprenderemos, agora, como usar o *PSpice* para verificar os teoremas vistos neste capítulo. Consideraremos especificamente o uso da análise de varredura CC para determinar o equivalente de Thévenin ou de Norton em qualquer par de nós em um circuito e a máxima transferência de potência para uma carga. Recomenda-se que o leitor leia no tutorial do *PSpice*, disponível em nosso *site* (www.grupoa.com.br), o tópico sobre análise CC como preparação para esta seção.

Para determinar o equivalente de Thévenin de um circuito em um par de terminais abertos utilizando o *PSpice*, usamos o editor de esquemas para desenhar o circuito e inserir uma fonte de corrente de prova independente, como Ip, nos terminais. A fonte de corrente de prova deve ter um nome de identificação ISRC. Em seguida, realizamos uma análise de varredura CC (DC Sweep) em Ip, conforme discutido no tutorial do nosso *site*. Normalmente, podemos deixar a corrente que passa por Ip variar de 0 V a 1 A em incrementos de 0,1 A. Após salvar e simular o circuito, usamos Probe para exibir um gráfico de tensão em Ip *versus* a corrente que passa por Ip. A interseção em zero do gráfico nos dá a tensão equivalente de Thévenin, enquanto a inclinação do gráfico é igual à resistência de Thévenin.

Determinar o equivalente de Norton envolve etapas similares, exceto que inserimos uma fonte de tensão independente de prova (com um nome de identificação VSRC), como Vp, nos terminais. Realizamos uma análise de varredura CC (DC Sweep) em Vp e fazemos Vp variar de 0 V a 1 V em incrementos de 0,1 V. Um gráfico da corrente através de Vp *versus* tensão Vp é obtido acessando o menu Probe após a simulação. A interseção em zero é igual à corrente de Norton, enquanto a inclinação do gráfico é igual à condutância de Norton.

Determinar a máxima transferência de potência para uma carga usando o *PSpice* envolve realizar uma varredura paramétrica CC no valor de componente de R_L na Figura 4.48 e representar a potência liberada para a carga em um gráfico em função de R_L. De acordo com a Figura 4.19, a potência máxima ocorre quando $R_L = R_{\text{Th}}$. Isso é mais bem ilustrado por meio de um exemplo, e o Exemplo 4.15 fará isso.

Usamos VSRC e ISRC, respectivamente, como nomes de componente para as fontes de tensão e de corrente.

EXEMPLO 4.14

Consideremos o circuito da Figura 4.31 (ver Exemplo 4.9). Use o *PSpice* para encontrar os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton.

Solução:

(a) Para encontrar a resistência de Thévenin R_{Th} e a tensão de Thévenin V_{Th} nos terminais *a-b* no circuito da Figura 4.31, usamos primeiro Schematics para desenhar o circuito, conforme mostrado na Figura 4.53*a*. Note que uma fonte de corrente de prova I2 é inserida nos terminais. Em **Analysis/Setput**, selecionamos DC Sweep (varredura CC). Na caixa de diálogo, selecionamos Linear como *Sweep Type* e *Current Source* (fonte de corrente) como *Sweep Var. Type*. Introduzimos I2 na caixa *Name* (nome), 0 como *Start Value* (valor inicial), 1 como *End Value* (valor final) e 0,1 como *Increment* (incremento). Após a simulação, adicionamos trace V(I2:–) a partir da janela A/D do *PSpice* e obtemos o gráfico mostrado na Figura 4.53*b*. A partir do gráfico, obtemos

$$V_{\text{Th}} = \text{Interseção em zero} = 20\ \text{V}, \qquad R_{\text{Th}} = \text{Inclinação} = \frac{26 - 20}{1} = 6\ \Omega$$

Estas concordam com o que obtivemos analiticamente no Exemplo 4.9.

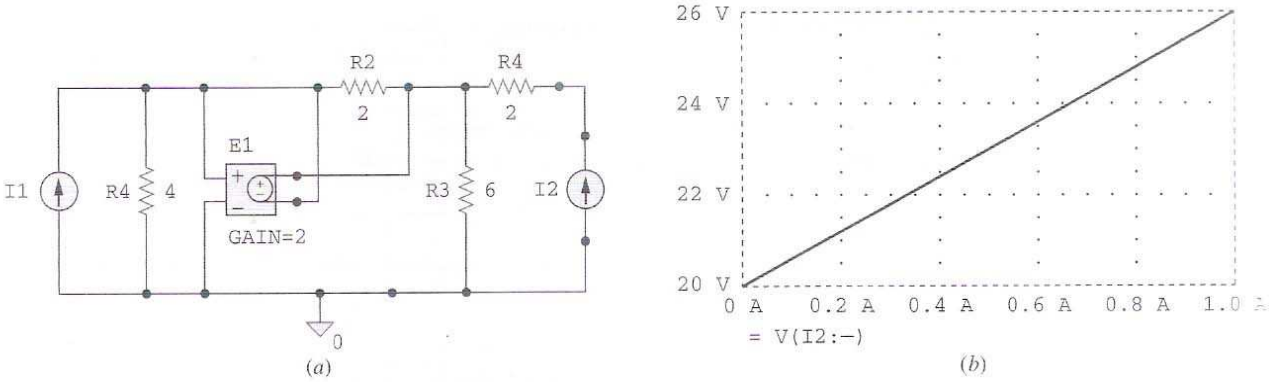


Figura 4.53 Esquema para o Exemplo 4.14: (*a*) esquema gráfico; (*b*) gráfico para determinar R_{Th} e V_{Th}.

(b) Para determinar o equivalente de Norton, modificamos o esquema na Figura 4.53*a*, substituindo a fonte de corrente de prova com uma fonte de tensão de prova V1. O resultado é o esquema na Figura 4.54*a*. Repetindo, na caixa de diálogo DC Sweep (varredura CC), selecionamos Linear como *Sweep Type* e Voltage Source como *Sweep Var. Type*. Introduzimos V1 na caixa de diálogo *Name*, 0 como *Start Value*, 1 como *End Value* e 0,1 como *Increment*. Na janela A/D do *PSpice*, adicionamos trace I (V1) e obtemos o gráfico da Figura 4.54*b*. Do gráfico, tiramos

$$I_N = \text{Interseção em zero} = 3{,}335 \text{ A}$$

$$G_N = \text{Inclinação} = \frac{3{,}335 - 3{,}165}{1} = 0{,}17 \text{ S}$$

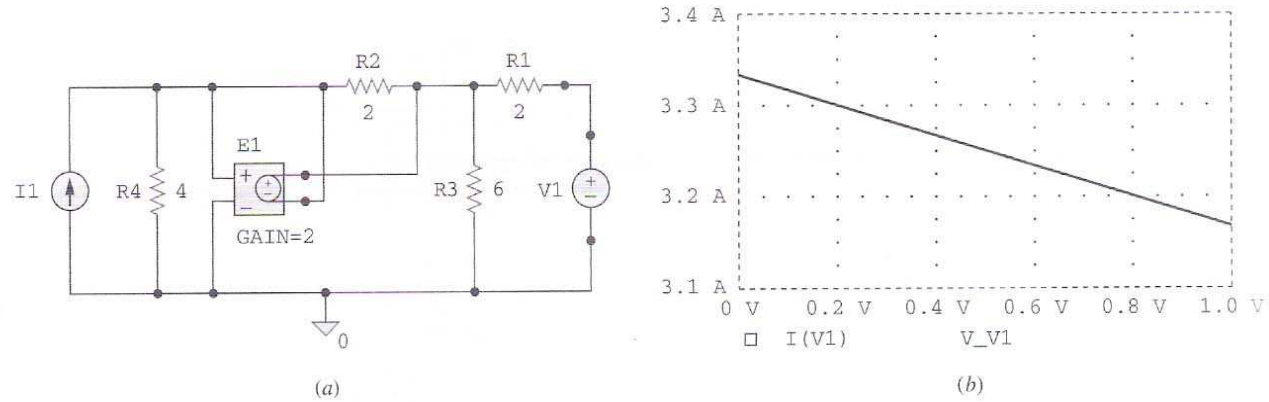


Figura 4.54 Esquema para o Exemplo 4.14: (*a*) esquema e; (*b*) gráfico para encontrar G_N e I_N.

PROBLEMA PRÁTICO 4.14

Refaça o Problema 4.9 usando o *PSpice*.

Resposta: $V_{Th} = 5{,}333$ V, $R_{Th} = 444{,}4$ mΩ.

EXEMPLO 4.15

Consulte o circuito da Figura 4.55. Use o *PSpice* para determinar a máxima transferência de potência para R_L.

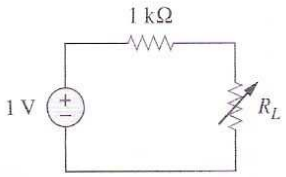


Figura 4.55 Esquema para o Exemplo 4.15.

Solução: Precisamos realizar uma análise de varredura CC em R_L para determinar quando a potência nela atinge seu máximo. Em primeiro lugar, desenhamos o circuito usando o recurso Schematics, conforme nos mostra a Figura 4.56. Assim que for desenhado, seguimos as três etapas dadas para preparo adicional do circuito para uma análise de varredura CC.

O primeiro passo envolve definir o valor de R_L como um parâmetro, já que queremos variá-la. Para tanto:

1. Dê um duplo clique (**DCLICKL**) no valor 1k de R2 (representando R_L), para abrir a caixa de diálogo *Set Attribute Value*.
2. Substitua 1k por {RL} e clique em **OK** para aceitar a mudança.

Observe que as chaves são necessárias.

O segundo passo é definir o parâmetro. Para isso:

1. Selecione **Draw/Get New Part/Libraries ... /special.slb**.
2. Digite PARAM na caixa de diálogo *PartName* e clique em **OK**.
3. Arraste (**DRAG**) a caixa para qualquer posição próxima do circuito.
4. Dê um clique com o botão esquerdo (**CLICKL**) para encerrar o modo de posicionamento.
5. Dê um duplo clique (**DCLICKL**) para abrir a caixa de diálogo *PartName*: *PARAM*.
6. Dê um clique com o botão esquerdo do *mouse* (**CLICKL**) sobre *NAME1* = digitando RL (sem usar chaves) na caixa de diálogo *Value*. Dê um clique com o botão esquerdo do *mouse* (**CLICKL**) em **Save Attr** para aceitar a mudança.
7. Dê um clique com o botão esquerdo do *mouse* (**CLICKL**) sobre *VALUE1* = digitando 2k na caixa de diálogo *Value*. Dê um clique com o botão esquerdo do *mouse* (**CLICKL**) em **Save Attr** para aceitar a mudança.
8. Clique em **OK**.

O valor 2k no item 7 é necessário para um cálculo do ponto de polarização; ele não pode ser deixado em branco.

A terceira etapa é configurar a análise de varredura CC para varrer o parâmetro. Para tal:

1. Selecione **Analysis/Setput** para acionar a caixa de diálogo DC Sweep.
2. Como *Sweep Type*, selecione Linear (ou Octave para um intervalo de R_L mais amplo).
3. Como *Sweep Var. Type*, selecione Global Parameter.
4. Na caixa de diálogo *Name*, digite RL.
5. Na caixa de diálogo *Start Value*, digite 100.
6. Na caixa de diálogo *End Value*, digite 5k.
7. Na caixa de diálogo *Increment*, digite 100.
8. Clique em **OK** e **Close** para aceitar os parâmetros.

Após cumprir essas etapas e salvar o circuito, estamos prontos para realizar a simulação. Selecione **Analysis/Simulate**. Se não existirem erros, selecionamos **Add Trace** na janela A/D do *PSpice* e digitamos –V(R2:2)*I(R2) na caixa de diálogo *Trace Command*. (O sinal negativo é necessário, já que I(R2) é negativo.) Isso gera o gráfico de potência liberada para R_L já que R_L varia de 100 Ω a 5 kΩ. Também, podemos obter a potência absorvida por R_L digitando na caixa de diálogo *Trace Command*. De qualquer maneira, temos o gráfico da Figura 4.57, e fica evidente que a potência máxima é 250 μW. Note que o máximo ocorre quando R_L = 1 Ω, conforme esperado analiticamente.

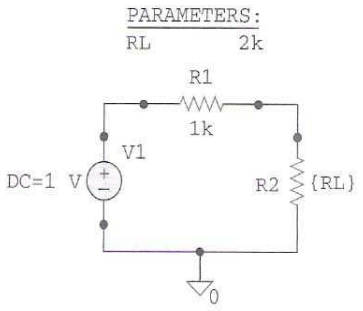


Figura 4.56 Esquema para o circuito da Figura 4.55.

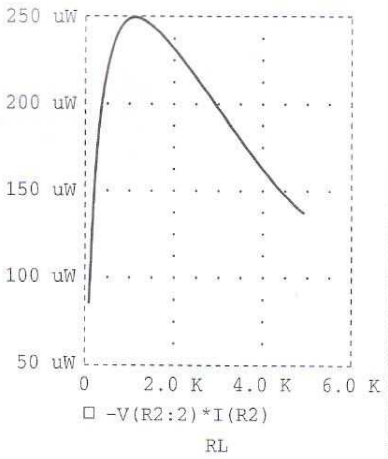


Figura 4.57 Esquema para o Exemplo 4.15: gráfico da potência em função de R_L.

PROBLEMA PRÁTICO 4.15

Determine a potência máxima transferida para R_L se o resistor de 1 kΩ na Figura 4.55 for substituído por um resistor de 2 kΩ.

Resposta: 125 μW.

4.10 †Aplicações

Nesta seção, discutiremos duas aplicações práticas importantes dos conceitos vistos neste capítulo: modelagem de fontes e medidas de resistência.

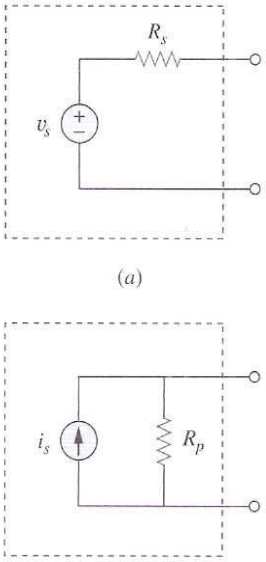


Figura 4.58 (*a*) Fonte de tensão real; (*b*) fonte de corrente real.

4.10.1 Modelagem de fontes

A modelagem de fontes dá um exemplo da utilidade do circuito equivalente de Thévenin e de Norton. Uma fonte ativa como uma bateria é normalmente descrita por seu circuito equivalente de Thévenin ou de Norton. Uma fonte de tensão ideal fornece uma tensão constante independentemente da corrente drenada pela carga, enquanto uma fonte de corrente ideal fornece uma corrente constante independentemente da tensão na carga. Como nos mostra a Figura 4.58, as fontes de corrente e de tensão reais não são ideais em virtude das suas *resistências internas* ou *resistências de fonte* R_s e R_p, elas se tornam ideais à medida que $R_s \to 0$ e $R_p \to \infty$. Para demonstrar que este é o caso, considere o efeito da carga sobre as fontes de tensão, conforme mostrado na Figura 4.59*a*. Pelo princípio da divisão de tensão, a tensão na carga é

$$v_L = \frac{R_L}{R_s + R_L} v_s \tag{4.25}$$

À medida que R_L aumenta, a tensão na carga se aproxima de uma tensão de fonte v_s, conforme ilustrado na Figura 4.59*b*. Da Equação (4.25), devemos observar o seguinte:

1. A tensão na carga será constante se a resistência interna R_s da fonte for zero ou, pelo menos, $R_s \ll R_L$. Quer dizer, quanto menor for R_s em relação a R_L, a fonte de tensão está mais próxima de ser uma fonte ideal.

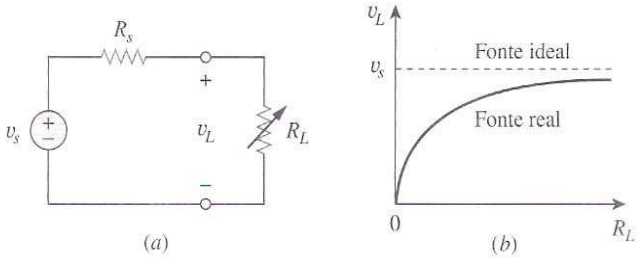


Figura 4.59 (*a*) Fonte de tensão real conectada a uma carga R_L; (*b*) A tensão de carga se reduz à medida que R_L diminui.

2. Quando a carga é desconectada (isto é, a fonte torna-se um circuito aberto de modo que $R_L \to \infty$), $v_{oc} = v_s$. Portanto, v_s pode ser considerada como a tensão de *fonte sem carga*. A conexão da carga faz que a tensão nos terminais caia; isso é conhecido como *efeito de carga*.

O mesmo argumento pode ser usado para uma fonte de corrente real quando conectada a uma carga, como mostrado na Figura 4.60*a*. Pelo princípio da divisão de corrente,

$$i_L = \frac{R_p}{R_p + R_L} i_s \tag{4.26}$$

A Figura 4.60*b* mostra a variação da corrente de carga à medida que a resistência de carga aumenta. Repetindo, percebemos uma queda na corrente devido à carga (efeito de carga), e a corrente de carga é constante (fonte de corrente ideal) quando a resistência interna é muito alta (isto é, $R_p \to \infty$ ou, pelo menos, $R_p \gg R_L$).

Algumas vezes, precisamos conhecer a tensão de fonte sem carga, v_s, e a resistência interna R_s de uma fonte de tensão. Para descobrir v_s e R_s, seguimos

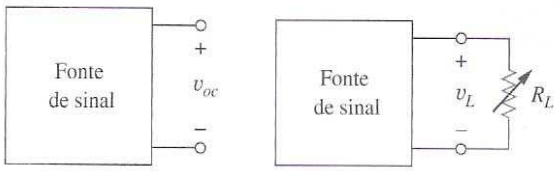
o procedimento ilustrado na Figura 4.61. Primeiro, medimos a tensão de circuito aberto v_{oc}, como na Figura 4.61*a*, e fazemos

$$V_s = V_{OC} \tag{4.27}$$

Em seguida, conectamos uma carga variável R_L entre os terminais como mostrado na Figura 4.61*b*. Ajustamos a resistência R_L até medirmos uma tensão de carga exatamente igual à metade da tensão de circuito aberto, $v_L = v_{oc}/2$, pois agora $R_L = R_{\text{Th}} = R_s$. Nesse ponto, desconectamos R_L e a medimos. Temos

$$R_s = R_L \tag{4.28}$$

Por exemplo, uma bateria de carro pode ter $v_s = 12$ V e $R_s = 0{,}05\ \Omega$.



(*a*) (*b*)

Figura 4.61 (*a*) medindo v_{oc}; (*b*) medindo v_L.

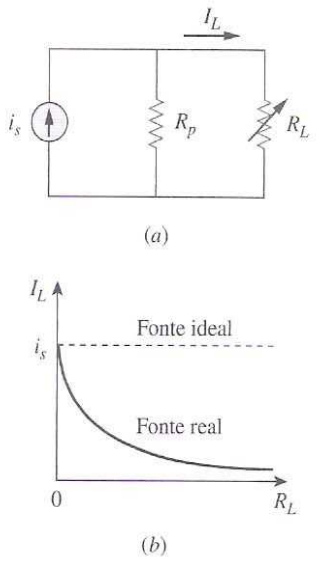


Figura 4.60 (*a*) Fonte de corrente real para uma carga R_L; (*b*) a corrente de carga diminui à medida que a R_L aumenta.

EXEMPLO 4.16

A tensão nos terminais de uma fonte de tensão é de 12 V quando conectada a uma carga de 2 W. Quando a carga é desconectada, a tensão nos terminais aumenta para 12,4 V. (a) Calcule a tensão de fonte v_s e resistência interna R_s. (b) Determine a tensão quando uma carga de 8 Ω é conectada à fonte.

Solução: (a) Substituímos a fonte por seu equivalente de Thévenin. A tensão nos terminais quando a carga é desconectada é a tensão de circuito aberto.

$$v_s = v_{oc} = 12{,}4 \text{ V}$$

Quando a carga é conectada, como mostrado na Figura 4.62*a*, $v_L = 12$ V e $p_L = 2$ W. Portanto,

$$p_L = \frac{v_L^2}{R_L} \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{v_L^2}{p_L} = \frac{12^2}{2} = 72\ \Omega$$

A corrente de carga é

$$i_L = \frac{v_L}{R_L} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}\text{ A}$$

A tensão em R_s é a diferença entre a tensão de fonte v_s e a tensão de carga v_L, ou

$$12{,}4 - 12 = 0{,}4 = R_s i_L, \qquad R_s = \frac{0{,}4}{I_L} = 2{,}4\ \Omega$$

(b) Agora que temos o equivalente de Thévenin da fonte, conectamos a carga de 8 Ω no equivalente de Thévenin conforme pode ser visto na Figura 4.62*b*. Usando a divisão de tensão, obtemos

$$v = \frac{8}{8 + 2{,}4}(12{,}4) = 9{,}538 \text{ V}$$

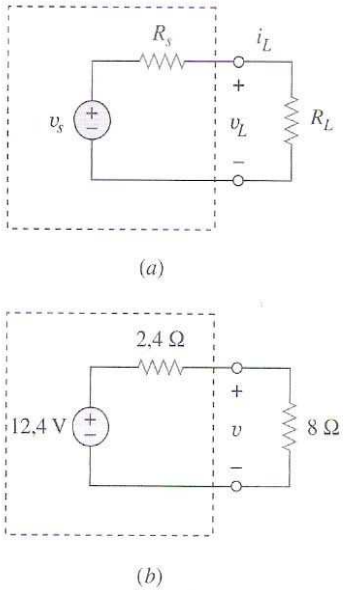


Figura 4.62 Esquema para o Exemplo 4.16.

PROBLEMA PRÁTICO 4.16

A tensão de circuito aberto medida em determinado amplificador é de 9 V. A tensão cai para 8 V quando um alto-falante de 20 Ω é conectado ao amplificador. Calcule a tensão quando um alto-falante de 10 Ω é usado em seu lugar.

Resposta: 7,2 V.

4.10.2 Medida de resistência

Embora o método do ohmímetro, projetado para medir resistências baixas, intermediárias ou altas, forneça a forma mais simples de se medir resistência, pode-se obter uma medida mais precisa usando uma ponte de Wheatstone, que é usada para medir resistências intermediárias entre 1 Ω e 1 MΩ. Valores de resistência muito baixos são medidos com um *miliohmímetro*, enquanto valores muito elevados são medidos com um *medidor Megger*.

Nota histórica: O circuito em ponte foi inventada por Charles Wheatstone (1802-1875), um professor britânico que também inventou o telégrafo, já que Samuel Morse o fez de forma independente nos Estados Unidos.

A ponte de Wheatstone (ou ponte de resistências) é usada em uma série de aplicações. Aqui a usaremos para medir uma resistência desconhecida, R_x, que é conectada à ponte, conforme mostrado na Figura 4.63. A resistência variável é ajustada até que nenhuma corrente flua pelo galvanômetro, que é basicamente um galvanômetro de d'Arsonval operando como um dispositivo indicador de corrente sensível como um amperímetro na faixa dos microampères. Nessa condição $v_1 = v_2$ e diz-se que a ponte está *equilibrada*. Uma vez que não passa nenhuma corrente pelo galvanômetro, R_1 e R_2 se comportam como se estivessem em série; o mesmo acontece com R_3 e R_x. O fato de nenhuma corrente passar pelo galvanômetro também implica $v_1 = v_2$. Aplicando o princípio da divisão da tensão,

$$v_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v = v_2 = \frac{R_x}{R_3 + R_x} v \tag{4.29}$$

Portanto, nenhuma corrente passa pelo galvanômetro quando

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_x}{R_3 + R_x} \quad \Rightarrow \quad R_2 R_3 = R_1 R_x$$

ou

$$\boxed{R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2} \tag{4.30}$$

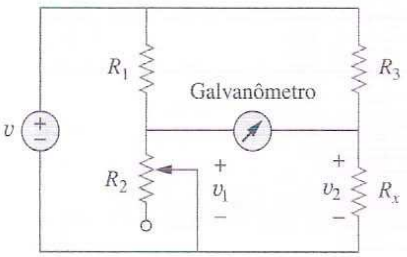


Figura 4.63 Ponte de Wheatstone; R_x é a resistência a ser medida.

Se $R_1 = R_3$ e R_2 for ajustada até que nenhuma corrente passe pelo galvanômetro, então $R_x = R_2$.

Como descobrir a corrente que passa pelo galvanômetro quando a ponte de Wheatstone estiver *desequilibrada*? Encontramos o equivalente de Thévenin (V_{Th} e R_{Th}) em relação aos terminais do galvanômetro. Se R_m for a resistência do galvanômetro, a corrente que passa por ele na condição desequilibrada é

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_m} \tag{4.31}$$

O Exemplo 4.18 ilustrará isso.

EXEMPLO 4.17

Na Figura 4.63, $R_1 = 500\ \Omega$ e $R_3 = 200\ \Omega$. A ponte é equilibrada quando R_2 é ajustada para 125 Ω. Determine a resistência desconhecida R_x.

Solução: Usando a Equação (4.30),

$$R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2 = \frac{200}{500} 125 = 50\ \Omega$$

PROBLEMA PRÁTICO 4.17

Uma ponte de Wheatstone tem $R_1 = R_3 = 1$ kΩ. R_2 é ajustada até que nenhuma corrente passe pelo galvanômetro. Nesse ponto, $R_2 = 3{,}2$ KΩ. Qual o valor da resistência desconhecida?

Resposta: 3,2 kΩ.

EXEMPLO 4.18

O circuito na Figura 4.64 representa uma ponte desequilibrada. Se o galvanômetro tiver uma resistência de 40 Ω, determine a corrente que passa pelo galvanômetro.

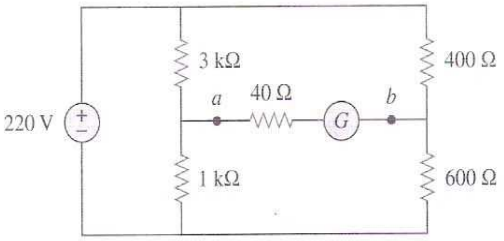


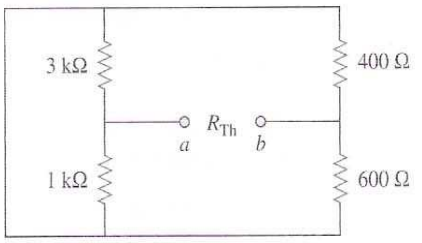
Figura 4.64 Ponte desequilibrada do Exemplo 4.18.

Solução: Precisamos primeiro substituir o circuito por seu equivalente de Thévenin nos terminais *a* e *b*. A resistência de Thévenin é encontrada usando o circuito da Figura 4.65*a*. Note que os resistores de 3 kΩ e de 1 kΩ estão em paralelo; assim como os resistores de 400 Ω e 600 Ω. As duas associações em paralelo formam uma associação em série em relação aos terminais *a* e *b*. Portanto,

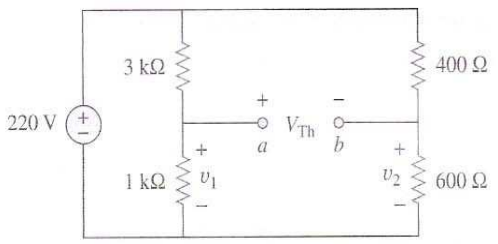
$$R_{\text{Th}} = 3.000 \| 1.000 + 400 \| 600$$
$$= \frac{3.000 \times 1.000}{3.000 + 1.000} + \frac{400 \times 600}{400 + 600} = 750 + 240 = 990\ \Omega$$

Para determinar a tensão de Thévenin, consideremos o circuito da Figura 4.65*b*. Usando o princípio de divisão de tensão,

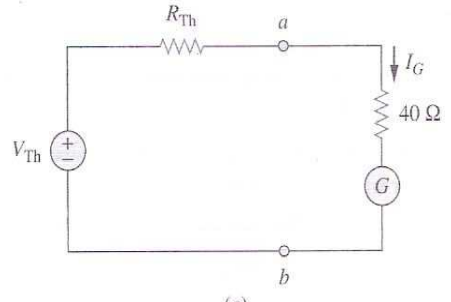
$$v_1 = \frac{1.000}{1.000 + 3.000}(220) = 55\ \text{V}, \qquad v_2 = \frac{600}{600 + 400}(220) = 132\ \text{V}$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 4.65 Esquema para o Exemplo 4.18: (*a*) encontrando R_{Th}; (*b*) encontrando V_{Th}; (*c*) determinando a corrente que passa pelo galvanômetro.

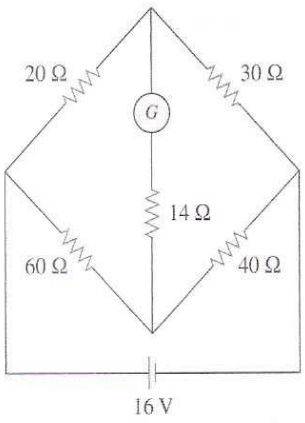


Figura 4.66 Esquema para o Problema prático 4.18.

PROBLEMA PRÁTICO 4.18

Obtenha a corrente que passa pelo galvanômetro, com resistência de 14 Ω, na ponte de Wheatstone, como mostrado na Figura 4.66.

Resposta: 64 mA.

Aplicando a LKT no laço *ab*, obtemos

$$-v_1 + V_{Th} + v_2 = 0 \quad \text{ou} \quad V_{Th} = v_1 - v_2 = 55 - 132 = -77 \text{ V}$$

Determinando o equivalente de Thévenin, encontramos a corrente que passa pelo galvanômetro usando a Figura 4.65*c*.

$$I_G = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_m} = \frac{-77}{990 + 40} = -74{,}76 \text{ mA}$$

O sinal negativo indica que a corrente flui no sentido oposto àquele suposto, isto é, do terminal *b* para o terminal *a*.

4.11 Resumo

1. Uma rede linear é formada por elementos lineares, fontes dependentes lineares e fontes independentes lineares.
2. Os teoremas de circuitos são usados para reduzir um circuito complexo a um mais simples, tornando, portanto, mais fácil a análise de circuitos.
3. O princípio da superposição afirma que para um circuito com várias fontes independentes, a tensão (ou a corrente) em um elemento é igual à soma algébrica de todas as tensões (ou correntes) individuais devido a cada fonte independente atuando em dado instante.
4. Transformação de fontes é um procedimento para transformar uma fonte de tensão em série com um resistor em uma fonte de corrente em paralelo com um resistor, ou vice-versa.
5. Os teoremas de Thévenin e de Norton possibilitam que isolemos parte de um circuito enquanto seu restante é substituído por um equivalente. O circuito equivalente de Thévenin é formado por uma fonte de tensão V_{Th} em série com um resistor R_{Th}, enquanto o de Norton é constituído por uma fonte de corrente I_N em paralelo com um resistor R_N. Os dois teoremas se relacionam entre si pela transformação de fontes.
$$R_N = R_{Th}, \qquad I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$
6. Para dado circuito equivalente de Thévenin, a máxima transferência de potência ocorre quando $R_L = R_{Th}$, isto é, quando a resistência de carga é igual à resistência de Thévenin.
7. O teorema da máxima transferência de potência afirma que a potência máxima é liberada por uma fonte para a carga R_L, quando R_L for igual a R_{Th}, que é a resistência de Thévenin nos terminais da carga.
8. O *PSpice* pode ser usado para comprovar os teoremas de circuitos vistos neste capítulo.
9. A modelagem de fontes e a medida de resistências usando uma ponte de Wheatstone são aplicações do teorema de Thévenin.

Questões para revisão

4.1 A corrente que passa por um ramo em um circuito linear é de 2 A quando a tensão da fonte de entrada for de 10 V. Se a tensão for reduzida para 1 V e a polaridade invertida, a corrente que passa por esse ramo será:

(a) –2 A (b) – 0,2 A (c) 0,2 A
(d) 2 A (e) 20 A

4.2 Para a superposição, não é necessário que seja considerada apenas uma fonte independente por vez; um número qualquer de fontes independentes pode ser considerado ao mesmo tempo.

(a) verdadeiro (b) falso

4.3 O princípio da superposição se aplica ao cálculo de potência.

(a) verdadeiro (b) falso

4.4 Consulte a Figura 4.67. A resistência de Thévenin nos terminais a e b é:

(a) 25 Ω (b) 20 Ω
(c) 5 Ω (d) 4 Ω

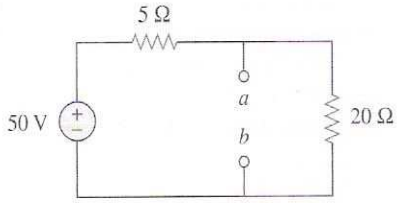


Figura 4.67 Esquema para as Questões para revisão 4.4 a 4.6.

4.5 A tensão de Thévenin nos terminais a e b do circuito da Figura 4.67 é:

(a) 50 A (b) 40 A
(c) 20 A (d) 10 A

4.6 A corrente de Norton nos terminais a e b do circuito da Figura 4.67 é:

(a) 10 A (b) 2,5 A
(c) 2 A (d) 0 A

4.7 A resistência de Norton R_N é exatamente igual à resistência de Thévenin R_{Th}.

(a) verdadeiro (b) falso

4.8 Que par de circuitos da Figura 4.68 são equivalentes?

(a) a e b
(b) b e d
(c) a e c
(d) c e d

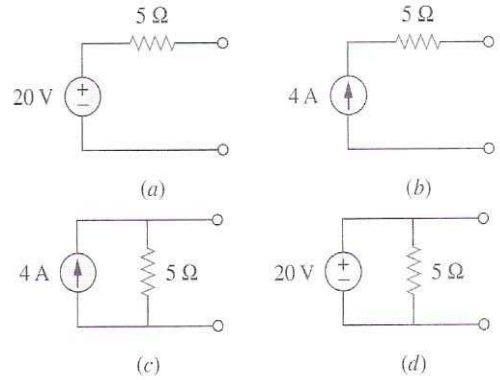


Figura 4.68 Esquema para a Questão para revisão 4.8.

4.9 Uma carga é conectada a uma rede. Nos terminais aos quais a carga está conectada, $R_{Th} = 10\ \Omega$ e $V_{Th} = 40$ V. A potência máxima fornecida à carga é:

(a) 160 W (b) 80 W
(c) 40 W (d) 1 W

4.10 Uma fonte fornece a potência máxima à sua carga quando a resistência de carga for igual à resistência da fonte.

(a) verdadeiro (b) falso

Respostas: 4.1b, 4.2a, 4.3b, 4.4d, 4.5b, 4.6a, 4.7a, 4.8c, 4.9c, 4.10a.

Problemas

• Seção 4.2 Propriedade da linearidade

4.1 Calcule a corrente i_o no circuito da Figura 4.69. Qual o valor da tensão de entrada é necessário para fazer que i_o seja igual a 5 A?

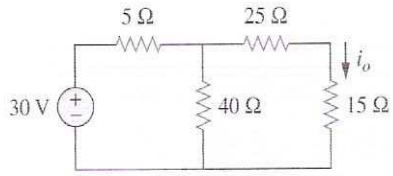


Figura 4.69 Esquema para o Problema 4.1.

4.2 Usando a Figura 4.70, elabore um problema para ajudar e2d outros estudantes a entender melhor a linearidade.

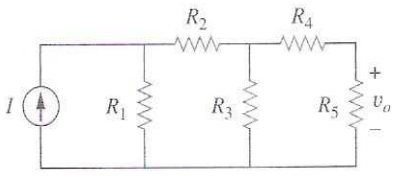


Figura 4.70 Esquema para o Problema 4.2.

4.3 (a) No circuito da Figura 4.71, calcule v_o e i_o quando $v_s = 1$ V.
(b) Determine v_o e i_o quando $v_s = 10$ V.

(c) Quais são os valores de v_o e i_o quando cada um dos resistores de 1 Ω for substituído por um resistor de 10 Ω e $v_s = 10$ V?

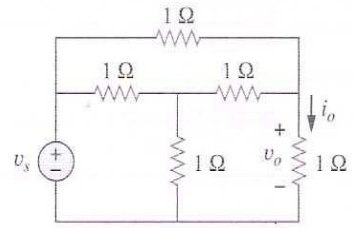


Figura 4.71 Esquema para o Problema 4.3.

4.4 Use a linearidade para determinar i_o no circuito da Figura 4.72.

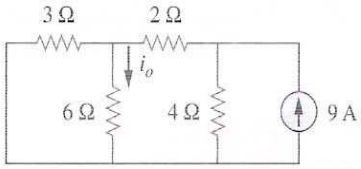


Figura 4.72 Esquema para o Problema 4.4.

4.5 Para o circuito da Figura 4.73, suponha que $v_o = 1$ V e use a linearidade para determinar o valor real de v_o.

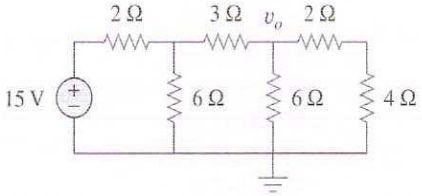


Figura 4.73 Esquema para o Problema 4.5.

4.6 Para o circuito linear apresentado na Figura 4.74, use o princípio da linearidade para completar a tabela a seguir.

Experimento	V_s	V_o
1	12 V	4 V
2		16 V
3	1 V	
4		−2 V

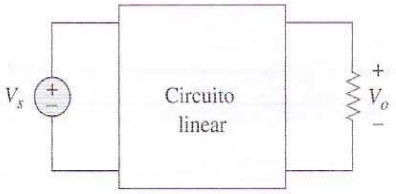


Figura 4.74 Esquema para o Problema 4.6.

4.7 Use o princípio da linearidade e a hipótese de que $V_o = 1$ V para determinar o valor real de V_o na Figura 4.75.

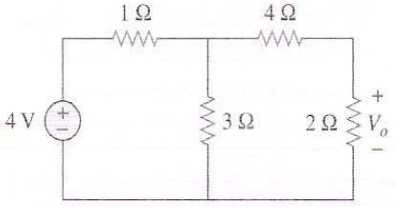


Figura 4.75 Esquema para o Problema 4.7.

Seção 4.3 Superposição

4.8 Usando superposição, determine V_o no circuito da Figura 4.76. Confira usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

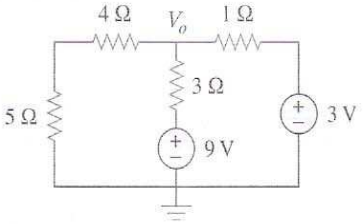


Figura 4.76 Esquema para o Problema 4.8.

4.9 Dado que $I = 4$ quando $V_s = 40$ V e $I_s = 4$ A e $I = 1$ A quando $V_s = 20$ V e $I_s = 0$, use o teorema da superposição e a linearidade para determinar o valor de I quando $V_s = 60$ V e $I_s = -2$ A.

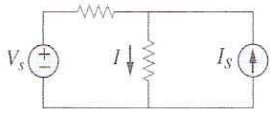


Figura 4.77 Esquema para o Problema 4.9.

4.10 Usando a Figura 4.78, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor o teorema da superposição. Note que a letra k é um ganho que você pode especificar de forma a tornar o problema de fácil solução, mas seu valor não deve ser nulo.

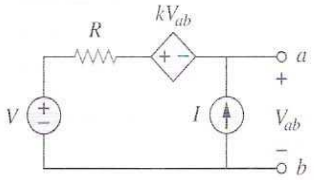


Figura 4.78 Esquema para o Problema 4.10.

4.11 Use o princípio da superposição para determinar i_o e v_o no circuito da Figura 4.79.

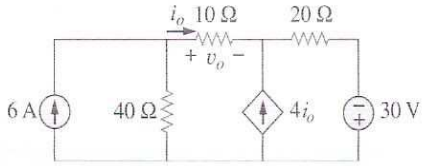


Figura 4.79 Esquema para o Problema 4.11.

4.12 Determine v_o no circuito da Figura 4.80 usando o princípio da superposição.

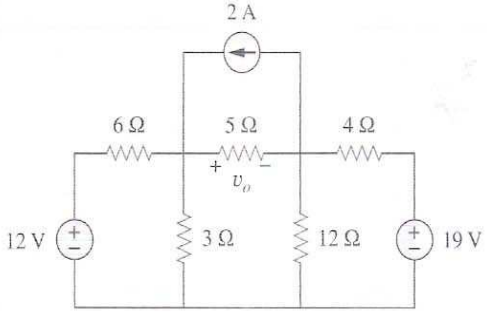


Figura 4.80 Esquema para o Problema 4.12.

4.23 Consultando a Figura 4.91, use transformação de fontes para determinar a corrente e a potência no resistor de 8 Ω.

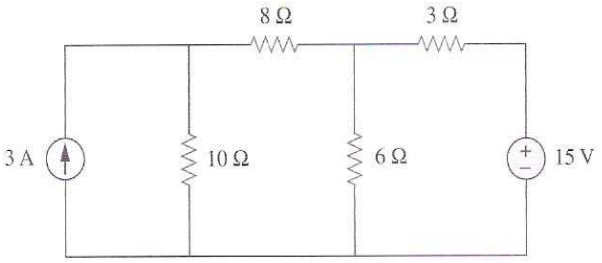


Figura 4.91 Esquema para o Problema 4.23.

4.24 Use transformação de fontes para determinar a tensão V_x no circuito da Figura 4.92.

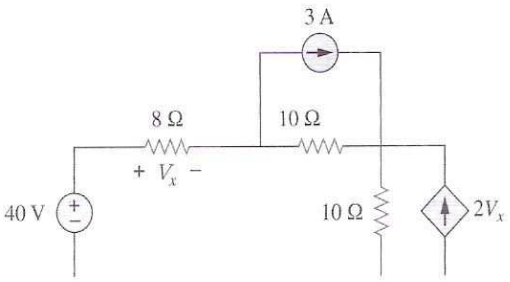


Figura 4.92 Esquema para o Problema 4.24.

4.25 Determine v_o no circuito da Figura 4.93 usando transformação de fontes. Verifique seu resultado usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

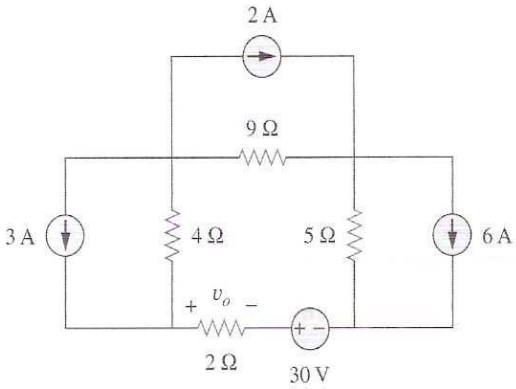


Figura 4.93 Esquema para o Problema 4.25.

4.26 Use transformação de fontes para determinar i_o no circuito da Figura 4.94.

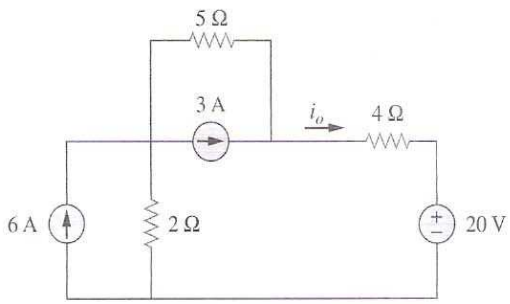


Figura 4.94 Esquema para o Problema 4.26.

4.27 Aplique transformação de fontes para determinar v_x no circuito da Figura 4.95.

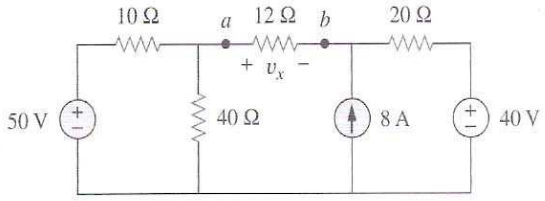


Figura 4.95 Esquema para o Problema 4.27.

4.28 Use transformação de fontes para determinar I_o na Figura 4.96.

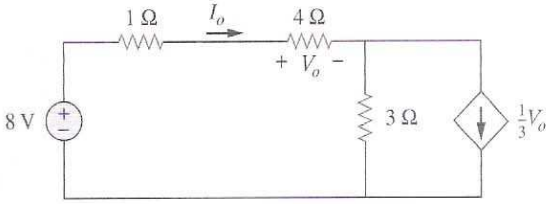


Figura 4.96 Esquema para o Problema 4.28.

4.29 Use transformação de fontes para obter v_o no circuito da Figura 4.97.

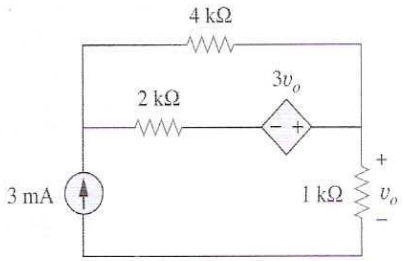


Figura 4.97 Esquema para o Problema 4.29.

4.30 Use transformação de fontes no circuito mostrado na Figura 4.98 para determinar i_x.

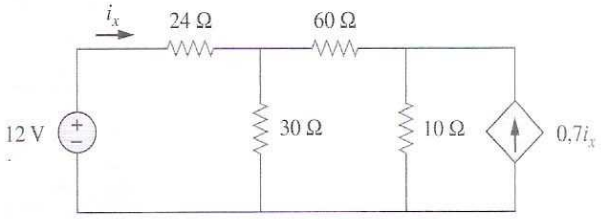


Figura 4.98 Esquema para o Problema 4.30.

4.31 Determine v_x no circuito da Figura 4.99 usando transformação de fontes.

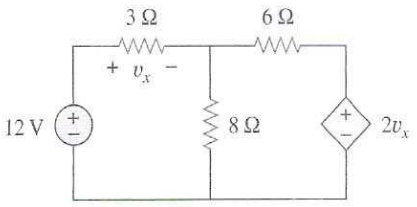


Figura 4.99 Esquema para o Problema 4.31.

4.32 Use transformação de fontes para determinar i_x no circuito da Figura 4.100.

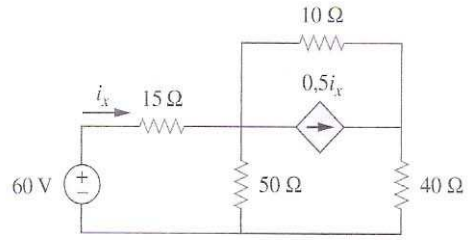


Figura 4.100 Esquema para o Problema 4.32.

• Seções 4.5 e 4.6 Teoremas de Thévenin e de Norton

4.33 Determine o circuito equivalente de Thévenin, referente ao circuito mostrado na Figura 4.101, visto pelo resistor de 5 Ω.

Em seguida, calcule a corrente no resistor de 5 Ω.

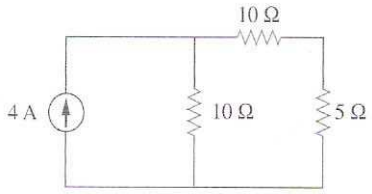


Figura 4.101 Esquema para o Problema 4.33.

4.34 Usando a Figura 4.102, elabore um problema que ajudará outros estudantes a entender melhor circuitos equivalentes de Thévenin.

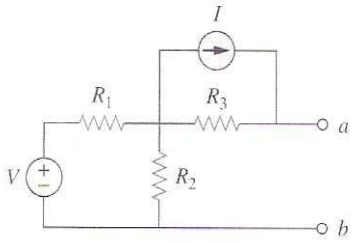


Figura 4.102 Esquema para os Problemas 4.34 e 4.49.

4.35 Use o teorema de Thévenin para encontrar v_o no Problema 4.12.

4.36 Calcule a corrente i no circuito da Figura 4.103 usando o teorema de Thévenin. (*Sugestão*: Determine o equivalente de Thévenin visto pelo resistor de 12 Ω.)

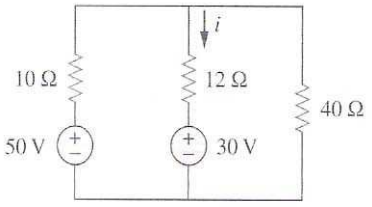


Figura 4.103 Esquema para o Problema 4.36.

4.37 Determine o equivalente de Norton em relação aos terminais a-b no circuito mostrado na Figura 4.104.

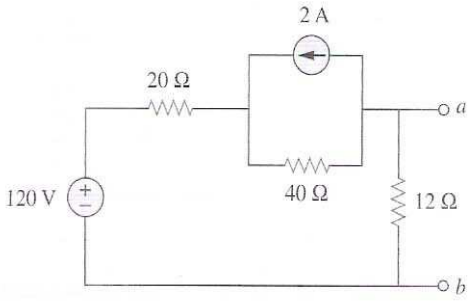


Figura 4.104 Esquema para o Problema 4.37.

4.38 Aplique o teorema de Thévenin para determinar V_o no circuito da Figura 4.105.

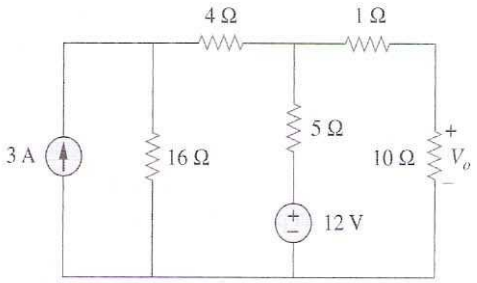


Figura 4.105 Esquema para o Problema 4.38.

4.39 Obtenha o equivalente de Thévenin nos terminais a-b do circuito da Figura 4.106.

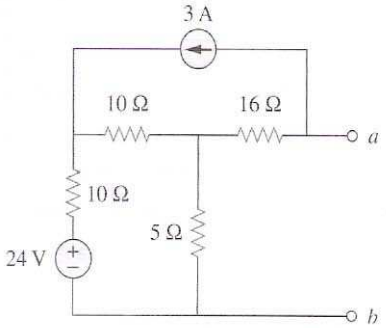


Figura 4.106 Esquema para o Problema 4.39.

4.40 Determine o equivalente de Thévenin nos terminais a-b do circuito da Figura 4.107.

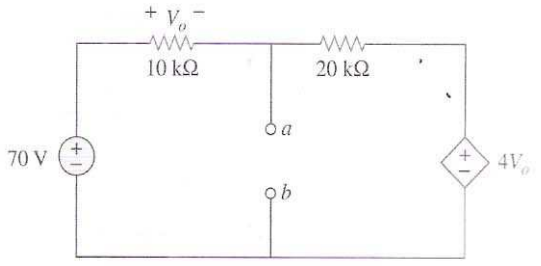


Figura 4.107 Esquema para o Problema 4.40.

4.41 Determine os equivalentes de Thévenin e de Norton nos terminais *a-b* do circuito mostrado na Figura 4.108.

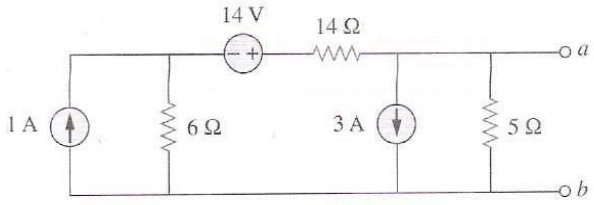


Figura 4.108 Esquema para o Problema 4.41.

*** 4.42** Para o circuito da Figura 4.109, determine o equivalente de Thévenin entre os terminais *a-b*.

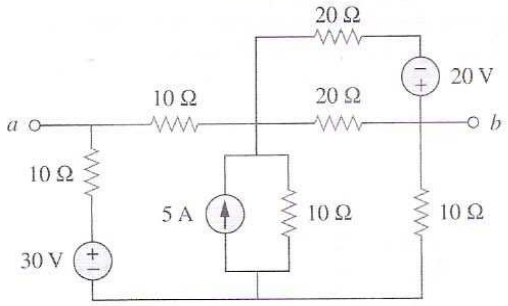


Figura 4.109 Esquema para o Problema 4.42.

4.43 Determine o equivalente de Thévenin a partir dos terminais *a* e *b* do circuito mostrado na Figura 4.110 e calcule i_x.

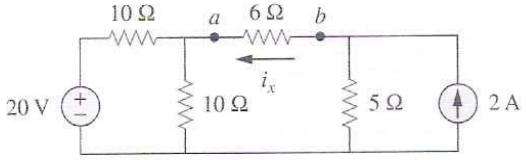


Figura 4.110 Esquema para o Problema 4.43.

4.44 Para o circuito da Figura 4.111, obtenha o equivalente de Thévenin conforme visto dos terminais.

(a) *a-b* (b) *b-c*

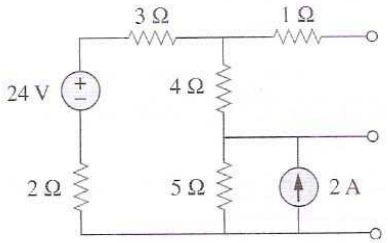


Figura 4.111 Esquema para o Problema 4.44.

4.45 Determine o equivalente de Norton do circuito da Figura 4.112 visto pelo terminais *a-b*.

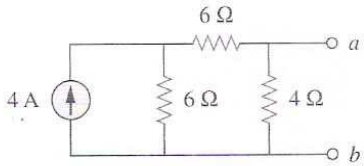


Figura 4.112 Esquema para o Problema 4.45.

* O asterisco indica um problema que constitui um desafio.

4.46 Usando a Figura 4.113, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entender melhor circuitos equivalentes de Norton.

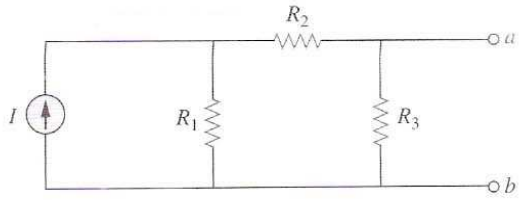


Figura 4.113 Esquema para o Problema 4.46.

4.47 Obtenha os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton do circuito na Figura 4.114 em relação aos terminais *a-b*.

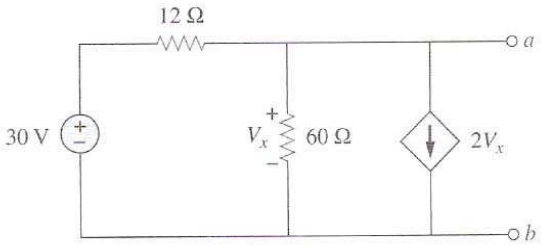


Figura 4.114 Esquema para o Problema 4.47.

4.48 Determine o equivalente de Norton nos terminais *a-b* para o circuito da Figura 4.115.

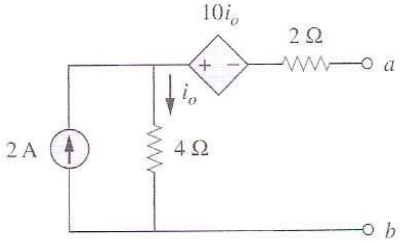


Figura 4.115 Esquema para o Problema 4.48.

4.49 Determine o equivalente de Norton visto pelos terminais *a-b* do circuito da Figura 4.102. Seja $V = 40$ V, $I = 3$ A, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ e $R_3 = 20\ \Omega$.

4.50 Obtenha o equivalente de Norton do circuito da Figura 4.116 à esquerda dos terminais *a-b*. Use o resultado para encontrar a corrente *i*.

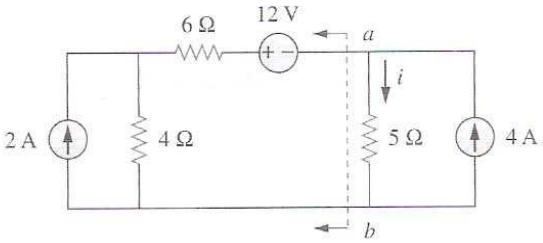


Figura 4.116 Esquema para o Problema 4.50.

4.51 Dado o circuito da Figura 4.117, obtenha o equivalente de Norton conforme visto dos terminais:

(a) *a-b*

(b) *c-d*

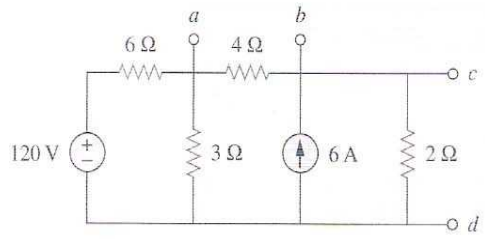


Figura 4.117 Esquema para o Problema 4.51.

4.52 Para o modelo de transistor da Figura 4.118, obtenha o equivalente de Thévenin nos terminais *a-b*.

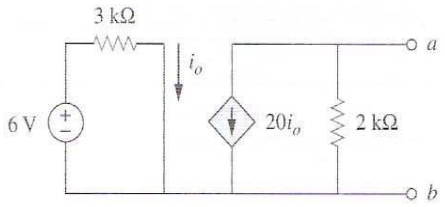


Figura 4.118 Esquema para o Problema 4.52.

4.53 Determine o equivalente de Norton nos terminais *a-b* do circuito da Figura 4.119.

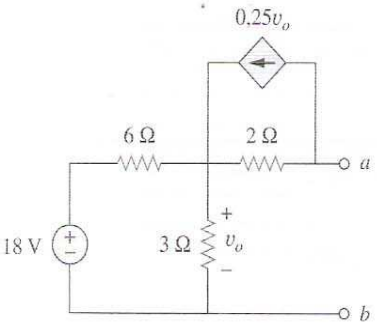


Figura 4.119 Esquema para o Problema 4.53.

4.54 Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais *a-b* do circuito da Figura 4.120.

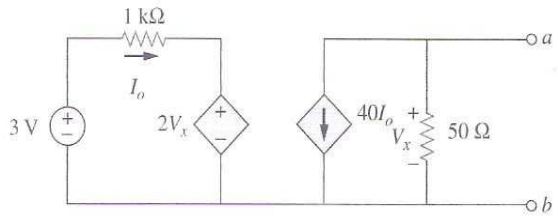


Figura 4.120 Esquema para o Problema 4.54.

* **4.55** Obtenha o equivalente de Norton nos terminais *a-b* do circuito da Figura 4.121.

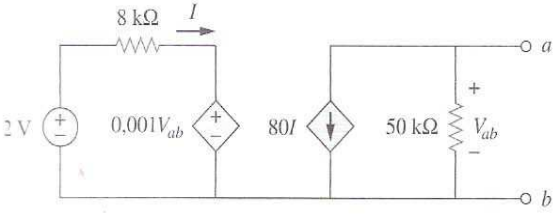


Figura 4.121 Esquema para o Problema 4.55.

4.56 Use o teorema de Norton para determinar V_o no circuito da Figura 4.122.

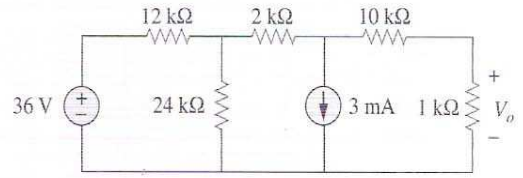


Figura 4.122 Esquema para o Problema 4.56.

4.57 Obtenha os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton nos terminais *a-b* para o circuito da Figura 4.123.

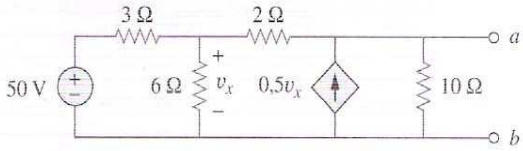


Figura 4.123 Esquema para os Problemas 4.57 e 4.79.

4.58 A rede na Figura 4.124 representa um modelo de um amplificador com transistor bipolar de emissor comum conectado a uma carga. Determine a resistência de Thévenin vista pela carga.

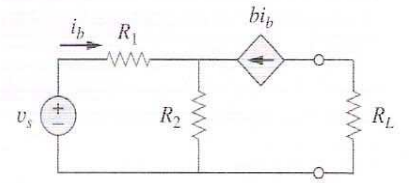


Figura 4.124 Esquema para o Problema 4.58.

4.59 Determine os equivalentes de Thévenin e de Norton nos terminais *a-b* do circuito da Figura 4.125.

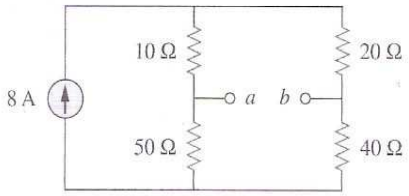


Figura 4.125 Esquema para o Problema 4.59.

* **4.60** Para o circuito da Figura 4.126, encontre os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton nos terminais *a-b*.

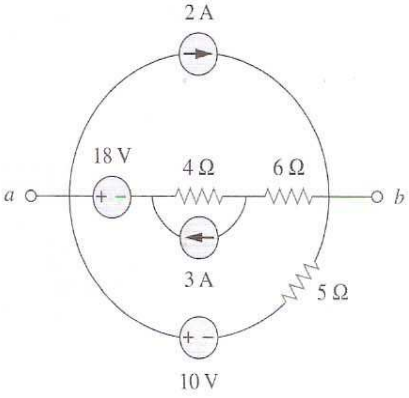


Figura 4.126 Esquema para os Problemas 4.60 e 4.81.

* **4.61** Obtenha os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton nos terminais *a-b* do circuito da Figura 4.127.

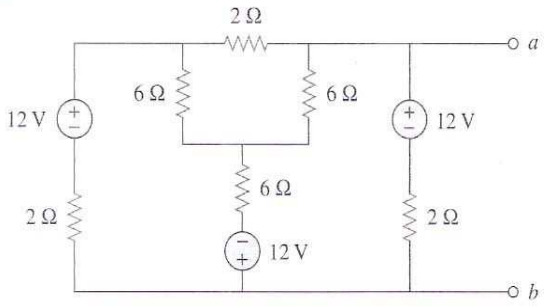


Figura 4.127 Esquema para o Problema 4.61.

* **4.62** Determine o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 4.128.

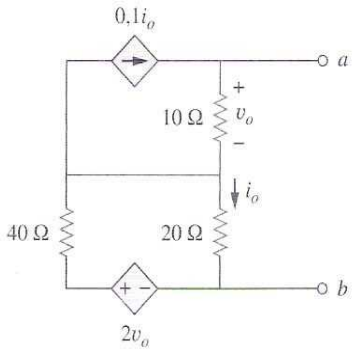


Figura 4.128 Esquema para o Problema 4.62.

4.63 Determine o equivalente de Norton para o circuito da Figura 4.129.

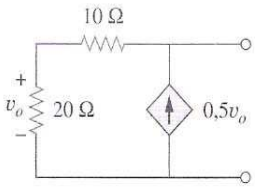


Figura 4.129 Esquema para o Problema 4.63.

4.64 Obtenha o equivalente de Thévenin visto nos terminais *a-b* do circuito na Figura 4.130.

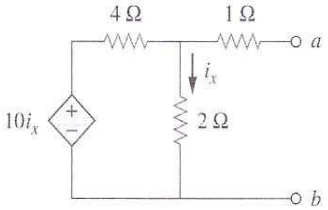


Figura 4.130 Esquema para o Problema 4.64.

4.65 Para o circuito mostrado na Figura 4.131, determine a relação entre V_o e I_o.

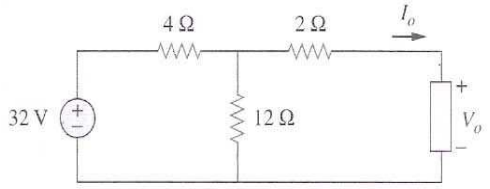


Figura 4.131 Esquema para o Problema 4.65.

Seção 4.8 Máxima transferência de potência

4.66 Determine a potência máxima que pode ser liberada para o resistor R no circuito da Figura 4.132.

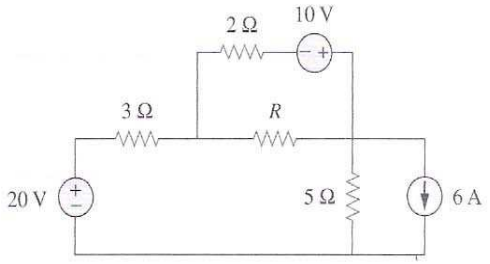


Figura 4.132 Esquema para o Problema 4.66.

4.67 O resistor variável R na Figura 4.133 é ajustado até absorver a potência máxima do circuito.

(a) Calcule o valor de R para a potência máxima.

(b) Determine a potência máxima absorvida por R.

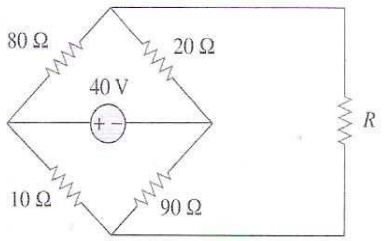


Figura 4.133 Esquema para o Problema 4.67.

4.68 Calcule o valor de R que resulta na máxima transferência de potência para o resistor de 10 Ω na Figura 4.134. Determine a potência máxima.

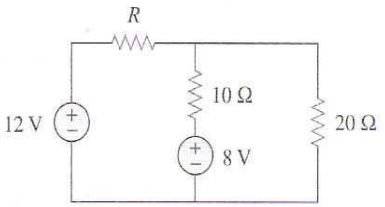


Figura 4.134 Esquema para o Problema 4.68.

4.69 Determine a potência máxima transferida para o resistor R no circuito da Figura 4.135.

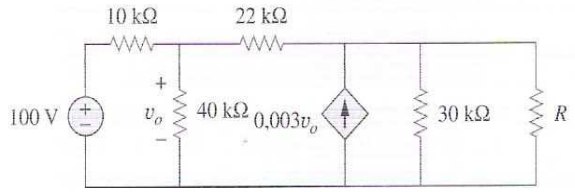


Figura 4.135 Esquema para o Problema 4.69.

4.70 Determine a potência máxima liberada para o resistor variável R mostrado no circuito da Figura 4.136.

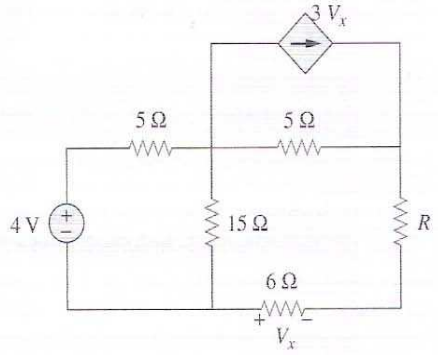


Figura 4.136 Esquema para o Problema 4.70.

4.71 Para o circuito da Figura 4.137, que resistor conectado entre os terminais a-b absorverá a potência máxima do circuito? De quanto é essa potência?

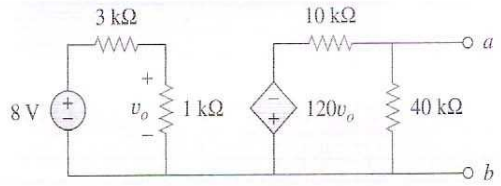


Figura 4.137 Esquema para o Problema 4.71.

4.72 (a) Para o circuito na Figura 4.138, obtenha o equivalente de Thévenin nos terminais a-b.

(b) Calcule a corrente em $R_L = 8\ \Omega$.

(c) Determine R_L para a máxima potência que pode ser liberada para R_L.

(d) Determine essa potência máxima.

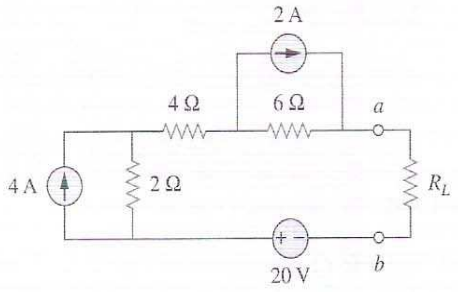


Figura 4.138 Esquema para o Problema 4.72.

4.73 Determine a potência máxima que pode ser liberada ao resistor variável R no circuito da Figura 4.139.

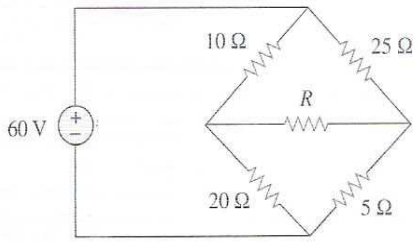


Figura 4.139 Esquema para o Problema 4.73.

4.74 Para a ponte mostrada na Figura 4.140, determine a carga R_L para a transferência de potência máxima e a potência máxima absorvida pela carga.

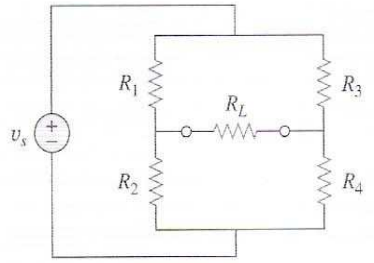


Figura 4.140 Esquema para o Problema 4.74.

* **4.75** Para o circuito da Figura 4.141, determine o valor de R tal que a potência máxima liberada para a carga seja de 3 mW.

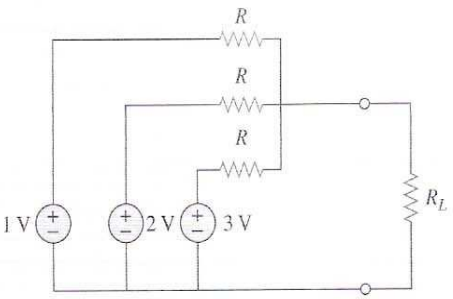


Figura 4.141 Esquema para o Problema 4.75.

Seção 4.9 Verificação dos teoremas de circuitos usando o *PSpice*

4.76 Resolva o Problema 4.34, usando o *PSpice* ou *MultiSim*. Seja $V = 40$ V, $I = 3$ A, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, e $R_3 = 20\ \Omega$.

4.77 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para solucionar o Problema 4.44.

4.78 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para solucionar o Problema 4.52.

4.79 Obtenha o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 4.123 usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

4.80 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para determinar o circuito equivalente de Thévenin nos terminais a-b do circuito da Figura 4.125.

4.81 Para o circuito da Figura 4.126, use o *PSpice* ou *MultiSim* para determinar o equivalente de Thévenin nos terminais a-b.

Seção 4.10 Aplicações

4.82 Uma bateria tem uma corrente de curto-circuito de 20 A e uma tensão de circuito aberto de 12 V. Se a bateria for conectada a uma lâmpada de resistência 2 Ω, calcule a potência dissipada pela lâmpada.

4.83 Foram obtidos os seguintes resultados de medições feitas entre os dois terminais de um circuito resistivo.

Tensão nos terminais	12 V	0 V
Corrente nos terminais	0 A	1,5 A

Determine o equivalente de Thévenin do circuito.

4.84 Quando conectado a um resistor de 4 Ω, uma bateria tem uma tensão nos terminais de 10,8 V, mas produz 12 V em um circuito aberto. Determine o circuito equivalente de Thévenin para a bateria.

4.85 O equivalente de Thévenin nos terminais *a-b* do circuito linear mostrado na Figura 4.142 deve ser determinado por meio de medições. Quando um resistor de 10 kΩ é conectado aos terminais *a-b*, a medição da tensão resulta em 6 V. Quando um resistor de 30 kΩ é conectado aos terminais, o resultado para a medição de V_{ab} é de 12 V. Determine: (a) o equivalente de Thévenin nos terminais *a-b*; (b) V_{ab} quando um resistor de 20 kΩ é conectado aos terminais *a-b*.

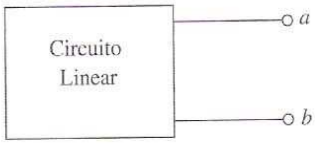


Figura 4.142 Esquema para o Problema 4.85.

4.86 Uma caixa preta com um circuito nela embutido é conectada a um resistor variável. São usados um amperímetro ideal (com resistência zero) e um voltímetro ideal (com resistência infinita) para medir corrente e tensão, conforme indicado na Figura 4.143. Os resultados são apresentados na tabela da página seguinte.

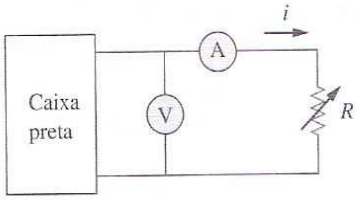


Figura 4.143 Esquema para o Problema 4.86.

(a) Determine i quando $R = 4\ \Omega$.

(b) Determine a potência máxima obtida da caixa preta.

$R(\Omega)$	V(V)	i(A)
2	3	1,5
8	8	1,0
14	10,5	0,75

4.87 É feito o modelo de um transdutor com uma fonte de corrente I_s e uma resistência em paralelo R_s. A medição da corrente nos terminais da fonte resulta em 9,975 mA quando for usado um amperímetro com resistência interna de 20 Ω.

(a) Se o acréscimo de um resistor de 2 kΩ entre os terminais da fonte faz a leitura no amperímetro cair para 9,876 mA, calcule I_s e R_s.

(b) Qual será a leitura do amperímetro se a resistência entre os terminais da fonte for alterada para 4 kΩ?

4.88 Considere o circuito da Figura 4.144. Um amperímetro com resistência interna R_i é inserido entre A e B para medir I_o. Determine a leitura do amperímetro se:

(a) $R_i = 500\ \Omega$, (b) $R_i = 0\ \Omega$ (Sugestão: Determine o circuito equivalente de Thévenin nos terminais *a-b*.)

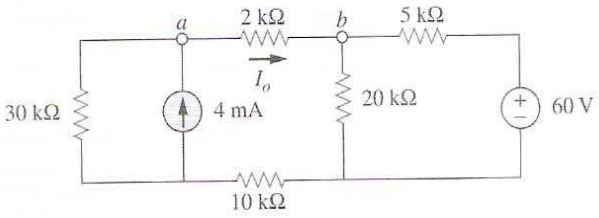


Figura 4.144 Esquema para o Problema 4.88.

4.89 Considere o circuito da Figura 4.145. (a) Substitua o resistor R_L por um amperímetro de resistência zero e determine a leitura do amperímetro. (b) Para verificar o teorema da reciprocidade, faça uma troca entre o amperímetro e a fonte de 12 V e determine novamente a leitura no amperímetro.

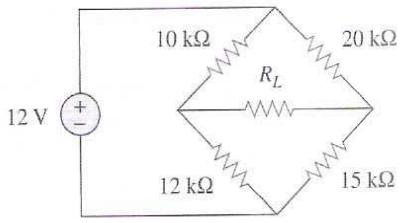


Figura 4.145 Esquema para o Problema 4.89.

4.90 A ponte de Wheatstone mostrada na Figura 4.146 é usada para medir a resistência de um extensômetro (*strain gauge*). O resistor ajustável tem um ajuste linear com valor máximo igual a 100 Ω. Se for determinado que a resistência do medidor de deformação é de 42,6 Ω, em que fração do curso completo do cursor deslizante ele se encontra quando a ponte estiver equilibrada?

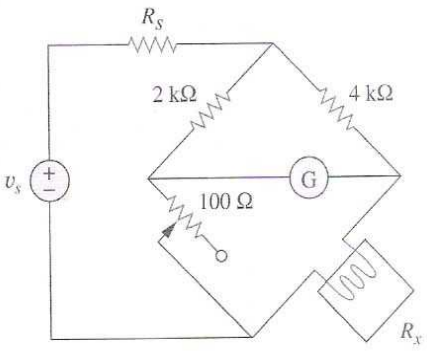


Figura 4.146 Esquema para o Problema 4.90.

4.91 (a) Na ponte de Wheatstone da Figura 4.147, selecione os valores de R_1 e R_3, tais que a ponte possa medir R_x no intervalo de 0 Ω a 10 Ω. (b) Repita o exercício para um intervalo de 0 Ω a 100 Ω.

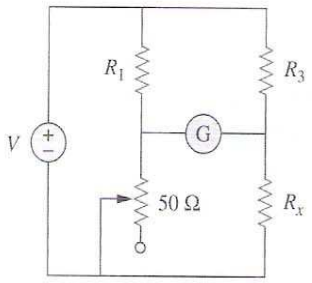


Figura 4.147 Esquema para o Problema 4.91.

*4.92 Considere a ponte da Figura 4.148. A ponte se encontra equilibrada? Se o resistor de 10 kΩ for substituído por um resistor de 18 kΩ, que resistor conectado entre os terminais *a-b* absorve a potência máxima? Qual é essa potência?

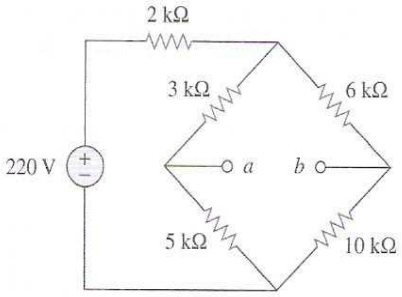


Figura 4.148 Esquema para o Problema 4.92.

Problemas abrangentes

4.93 O circuito da Figura 4.149 é um modelo de amplificador com transistores de emissor comum. Determine i_x usando transformação de fontes.

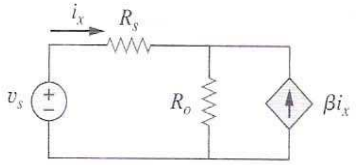


Figura 4.149 Esquema para o Problema 4.93.

4.94 Atenuador é um circuito de interface que reduz o nível de tensão sem mudar a resistência de saída.

(a) Através da especificação de R_s e R_p na interface da Figura 4.150, projete um atenuador que atenda às seguintes especificações:

$$\frac{V_o}{V_g} = 0{,}125, \qquad R_{eq} = R_{Th} = R_g = 100\ \Omega$$

(b) Usando a interface projetada no item (a), calcule a corrente através de uma carga de $R_L = 50\ \Omega$ e $V_g = 12$ V.

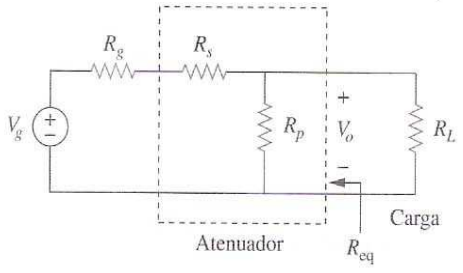


Figura 4.150 Esquema para o Problema 4.94.

*4.95 Um voltímetro CC com sensibilidade de 20 kΩ/V é usado para encontrar o equivalente de Thévenin de um circuito linear. As leituras em duas escalas são as seguintes:

(a) Escala 0-10 V: 4 V

(b) Escala 0-50 V: 5 V

Obtenha a tensão de Thévenin e a resistência de Thévenin do circuito linear.

*4.96 Um conjunto de resistências é conectado a um resistor de carga R e uma bateria de 9 V conforme mostrado na Figura 4.151.

(a) Determine o valor de R tal que $V_o = 1{,}8$ V.

(b) Calcule o valor de R que drenará a corrente máxima. Qual é a corrente máxima?

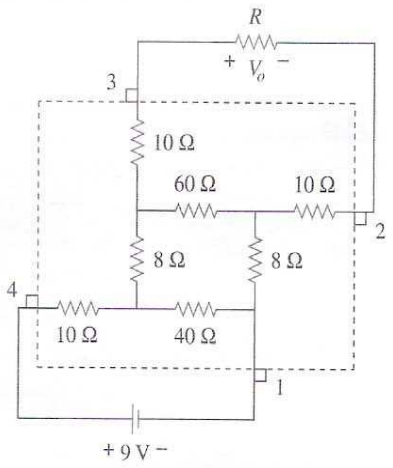


Figura 4.151 Esquema para o Problema 4.96.

4.97 Um circuito amplificador de emissor comum é mostrado na Figura 4.152. Obtenha o equivalente de Thévenin para os pontos B e E.

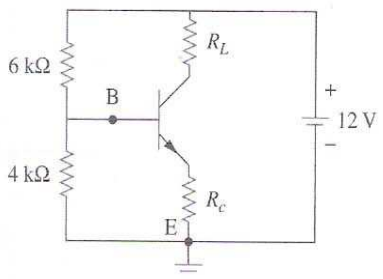


Figura 4.152 Esquema para o Problema 4.97.

*4.98 Para o Problema prático 4.18, determine a corrente através do resistor de 40 Ω e a potência dissipada pelo resistor.

5

AMPLIFICADORES OPERACIONAIS

Aqueles que não ponderam são fanáticos, aqueles que não podem são tolos, e aqueles que não ousam são escravos.

Lord Byron

Progresso profissional

Carreira em instrumentação eletrônica

A engenharia envolve a aplicação de princípios físicos ao desenvolver dispositivos para o benefício da humanidade. Porém, esses princípios não podem ser compreendidos sem medição; de fato, os físicos normalmente dizem que física é a ciência que mede a realidade. Assim como as medidas são as ferramentas para entender o mundo físico, os instrumentos são as ferramentas para medição. O amplificador operacional que será apresentado neste capítulo é um elemento fundamental da instrumentação eletrônica moderna. Consequentemente, o domínio de seus fundamentos é primordial para qualquer aplicação prática de circuitos eletrônicos.

Os instrumentos eletrônicos são usados em todos os campos da ciência e da engenharia. Eles se proliferaram na ciência e na tecnologia a ponto de que seria incabível ter uma formação técnica ou científica sem ter tido contato com os instrumentos eletrônicos. Por exemplo, físicos, fisiologistas, químicos e biólogos têm de aprender a usá-los. Particularmente, para os estudantes de engenharia elétrica, a habilidade na operação de instrumentos eletrônicos analógicos e digitais, como amperímetros, voltímetros, ohmímetros, osciloscópios, analisadores de espectro e geradores de sinais, é fundamental.

Além de desenvolver a capacidade de operar os instrumentos, alguns engenheiros eletricistas se especializam no projeto e na construção de instrumentos eletrônicos. Esses engenheiros sentem prazer em construir seus próprios instrumentos, sendo que a maioria deles inventa e patenteia suas invenções. Especialistas em instrumentos eletrônicos encontram colocação em faculdades de medicina, hospitais, laboratórios de pesquisa, indústria aeronáutica e em milhares de outras indústrias em que instrumentos eletrônicos são usados rotineiramente.

5.1 Introdução

Após termos aprendido as leis e teoremas básicos da análise de circuitos, agora estamos prontos para estudar um elemento de circuito ativo de fundamental importância: o *amplificador operacional* (ou AOP), que é um componente básico dos circuitos.

O termo amplificador operacional foi introduzido em 1947 por John Ragazzini e seus colegas, em seu trabalho sobre computadores analógicos para o National Defense Research Council, após a Segunda Guerra Mundial. Os primeiros amplificadores operacionais usavam válvulas em vez de transistores.

O amplificador operacional é uma unidade eletrônica que se comporta como uma fonte de tensão controlada por tensão.

Ele também pode ser usado na construção de uma fonte de corrente controlada por corrente ou tensão. Um AOP é capaz de adicionar sinais, amplificar um sinal, integrá-lo ou diferenciá-lo. Essa habilidade em realizar operações matemáticas é a razão para ele ser chamado de *amplificador operacional*. Esse também é o motivo para o seu largo uso em projetos analógicos. Os amplificadores operacionais são populares em projetos de circuitos práticos, pois são versáteis, baratos, fáceis de usar e muito utilizados por projetistas.

Um amplificador operacional também pode ser considerado um amplificador de tensão de alto ganho.

Começaremos discutindo o AOP ideal e, posteriormente, consideraremos o AOP real. Usando-se a análise nodal como ferramenta, levamos em conta circuitos com amplificadores operacionais ideais como inversor, seguidor de tensão, somador e amplificador diferencial. Também analisaremos circuitos com amplificadores operacionais utilizando o *PSpice*. Finalmente, aprenderemos como um AOP é empregado em conversores digitais-analógicos e amplificadores para instrumentação.

5.2 Amplificadores operacionais

Um AOP é projetado de forma a executar algumas operações matemáticas quando componentes externos, como resistores e capacitores, estão conectados a seus terminais. Portanto,

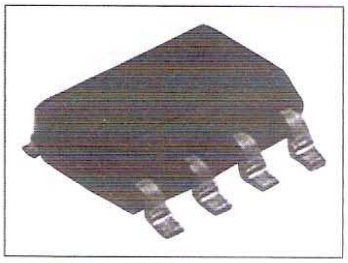


Figura 5.1 Um AOP típico.
(*Cortesia da Tech America.*)

Amplificador operacional é um elemento de circuito ativo projetado para executar operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação, divisão, diferenciação e integração.

Ele é um dispositivo eletrônico formado por um complexo arranjo de resistores, transistores, capacitores e diodos. Uma discussão completa do que há por dentro do amplificador operacional está fora do escopo deste livro. Bastará tratarmos o amplificador operacional como um componente básico para a criação de circuitos e simplesmente estudar o que acontece em seus terminais.

Os AOPs são encontrados no mercado em circuitos integrados sob diversas formas. A Figura 5.1 ilustra um circuito integrado de AOP comum. Uma forma conhecida é o *Dual In-line Package* (DIP) de oito pinos, mostrado na Figura 5.2*a*. O pino ou terminal 8 não é utilizado, e os terminais 1 e 5 são de pequeno interesse para nós. Os cinco terminais importantes são:

A pinagem na Figura 5.2*a* corresponde ao amplificador operacional (AOP) 741 para aplicações gerais fabricado pela Fairchild Semiconductor.

1. Entrada inversora, pino 2.
2. Entrada não inversora, pino 3.
3. Saída, pino 6.
4. Fonte de alimentação positiva V^+, pino 7.
5. Fonte de alimentação negativa V^-, pino 4.

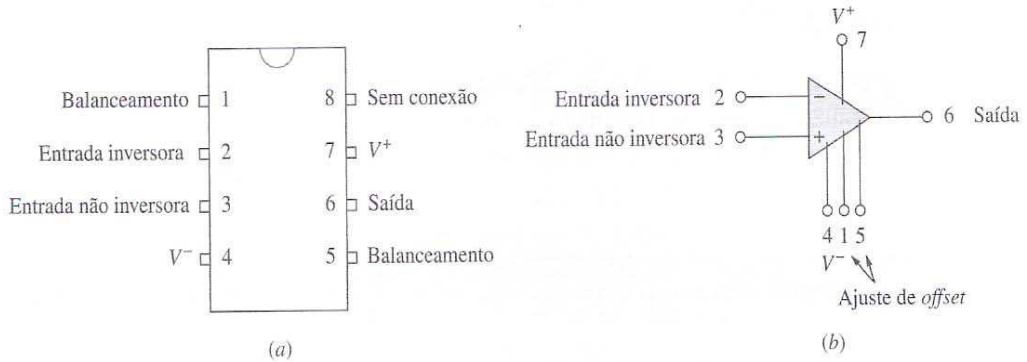


Figura 5.2 AOP comum: (*a*) pinagem; (*b*) símbolo representativo em circuitos.

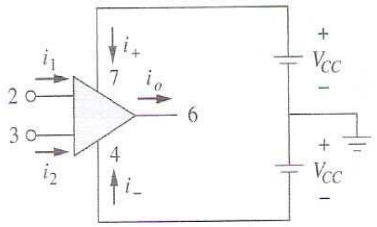


Figura 5.3 Alimentando o AOP.

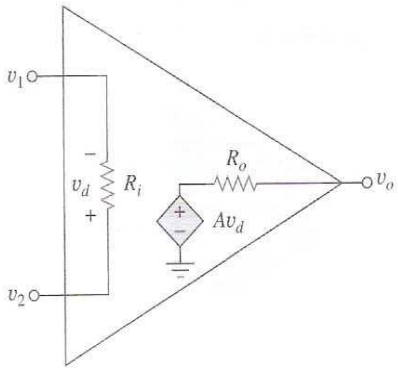


Figura 5.4 O circuito equivalente a um AOP real.

O símbolo representativo em circuitos para um AOP é o triângulo indicado na Figura 5.2*b*; conforme mostrado, ele possui duas entradas e uma saída, nas quais as entradas são marcadas com sinais negativo (–) e positivo (+) para especificar, respectivamente, entradas *inversora* e *não inversora*. Uma entrada aplicada ao terminal não inversor aparecerá com a mesma polaridade na saída, enquanto uma entrada aplicada ao terminal inversor aparecerá invertida na saída.

Como um elemento ativo, o AOP deve ser alimentado por uma fonte de tensão, conforme ilustrado na Figura 5.3. Embora, para simplificar, as fontes de alimentação muitas vezes sejam ignoradas em diagramas de circuitos com AOPs, as correntes das fontes de alimentação não devem ser menosprezadas. Pela LKC,

$$i_o = i_1 + i_2 + i_+ + i_- \tag{5.1}$$

O modelo de circuito equivalente a um AOP é mostrado na Figura 5.4. A parte referente à saída consiste em uma fonte controlada por tensão em série com a resistência de saída R_o. Fica evidente, a partir dessa figura, que a resistência de entrada R_i é a resistência equivalente de Thévenin vista pelos terminais de entrada, enquanto a resistência de saída R_o é a resistência equivalente de Thévenin vista na saída. A tensão de entrada diferencial v_d é dada por

$$v_d = v_2 - v_1 \tag{5.2}$$

onde v_1 é a tensão entre o terminal inversor e o terra, e v_2 é a tensão entre o terminal não inversor e o terra. O AOP detecta a diferença entre as duas entradas, multiplica-a pelo ganho A e faz que a tensão resultante apareça na saída. Portanto, a saída v_o é dada por

$$\boxed{v_o = Av_d = A(v_2 - v_1)} \tag{5.3}$$

A é chamado *ganho de tensão de malha aberta*, pois é o ganho do AOP sem qualquer realimentação externa da saída para a entrada. A Tabela 5.1 apresenta

Algumas vezes, o ganho de tensão é expresso em decibéis (dB), conforme discutido no Capítulo 14.

$$A \text{ dB} = 20 \log_{10} A$$

Tabela 5.1 • Faixas de valores comuns para parâmetros de AOPs.

Parâmetro	Faixas de valores	Valores ideais
Ganho de malha aberta (A)	10^5 para 10^8	∞
Resistência de entrada (R_i)	10^5 para 10^{13} Ω	∞ Ω
Resistência de saída (R_o)	10 para 100 Ω	0 Ω
Tensão de alimentação (V_{CC})	5 para 24 V	

os valores comuns de ganho de tensão A, resistência de entrada R_i, resistência de saída R_o e tensão de alimentação V_{CC}.

O conceito de realimentação é crucial para nosso entendimento em circuitos com AOPs. A realimentação negativa é obtida quando a saída é realimentada no terminal inversor do AOP. Conforme ilustra o Exemplo 5.1, quando não existe um caminho de realimentação da saída para a entrada, a razão entre a tensão de saída e a de entrada é denominada *ganho de malha fechada*, que é quase insensível em relação ao ganho de malha aberta A do AOP, como resultado de realimentação negativa. Por essa razão, os amplificadores operacionais são usados em circuitos com realimentação.

Uma limitação prática do AOP é que a magnitude de sua tensão de saída não pode exceder $|V_{CC}|$. Em outras palavras, a tensão de saída é dependente e limitada pela tensão da fonte de alimentação. A Figura 5.5 representa que o AOP pode operar em três modos, dependendo da tensão de entrada diferencial, v_d:

1. Saturação positiva, $v_o = V_{CC}$.
2. Região linear, $-V_{CC} \leq v_o = Av_d \leq V_{CC}$.
3. Saturação negativa, $v_o = -V_{CC}$.

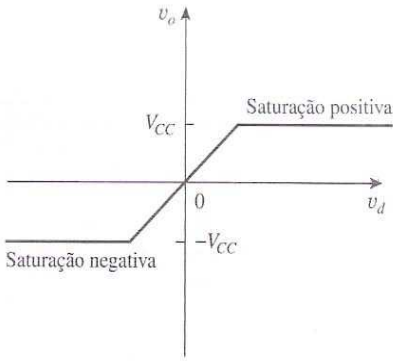


Figura 5.5 A tensão de saída, v_o, do AOP em função da tensão de entrada diferencial v_d.

Se tentarmos aumentar v_d além do intervalo linear, o AOP torna-se saturado e produz $v_o = V_{CC}$ ou $v_o = -V_{CC}$. Neste livro, partiremos do pressuposto de que nossos AOPs operam no modo linear. Isso significa que a tensão de saída fica limitada a

$$-V_{CC} \leq v_o \leq V_{CC} \tag{5.4}$$

Embora sempre devamos operar com o AOP na região linear, deve-se ter em mente a possibilidade de saturação em projetos envolvendo amplificadores operacionais, para evitar o projeto de circuitos com amplificadores operacionais que não funcionarão em laboratório.

Ao longo deste livro, consideraremos que um AOP opera no intervalo linear. Tenha em mente a restrição de tensão do AOP nesse modo.

EXEMPLO 5.1

Um AOP 741 tem ganho de tensão de malha aberta igual a 2×10^5, resistência de entrada de 2 MΩ e resistência de saída de 50 Ω. O AOP é usado no circuito da Figura 5.6*a*. Determine o ganho de malha fechada, v_o/v_s. Determine a corrente i quando $v_s = 2$ V.

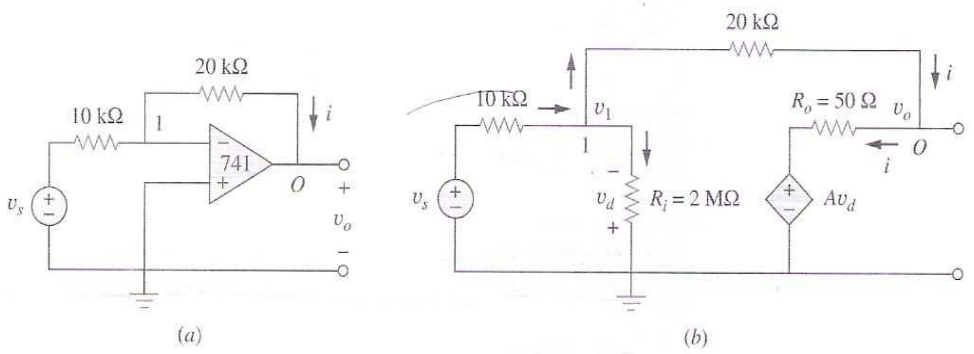


Figura 5.6 Esquema para o Exemplo 5.1: (*a*) circuito original; (*b*) circuito equivalente.

Solução: Usando o modelo de AOP da Figura 5.4, obtemos o circuito equivalente da Figura 5.6*a*, conforme ilustrado na *b*. Em seguida, resolvemos o circuito da Figura 5.6*b* utilizando análise nodal. No nó 1, a LKC resulta em

$$\frac{v_s - v_1}{10 \times 10^3} = \frac{v_1}{2.000 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3}$$

os valores comuns de ganho de tensão A, resistência de entrada R_i, resistência de saída R_o e tensão de alimentação V_{CC}.

O conceito de realimentação é crucial para nosso entendimento em circuitos com AOPs. A realimentação negativa é obtida quando a saída é realimentada no terminal inversor do AOP. Conforme ilustra o Exemplo 5.1, quando não existe um caminho de realimentação da saída para a entrada, a razão entre a tensão de saída e a de entrada é denominada *ganho de malha fechada*, que é quase insensível em relação ao ganho de malha aberta A do AOP, como resultado de realimentação negativa. Por essa razão, os amplificadores operacionais são usados em circuitos com realimentação.

Uma limitação prática do AOP é que a magnitude de sua tensão de saída não pode exceder $|V_{CC}|$. Em outras palavras, a tensão de saída é dependente e limitada pela tensão da fonte de alimentação. A Figura 5.5 representa que o AOP pode operar em três modos, dependendo da tensão de entrada diferencial, v_d:

1. Saturação positiva, $v_o = V_{CC}$.
2. Região linear, $-V_{CC} \leq v_o = Av_d \leq V_{CC}$.
3. Saturação negativa, $v_o = -V_{CC}$.

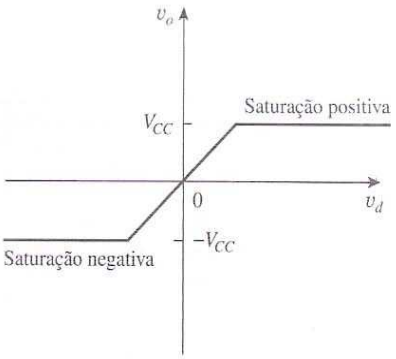


Figura 5.5 A tensão de saída, v_o, do AOP em função da tensão de entrada diferencial v_d.

Se tentarmos aumentar v_d além do intervalo linear, o AOP torna-se saturado e produz $v_o = V_{CC}$ ou $v_o = -V_{CC}$. Neste livro, partiremos do pressuposto de que nossos AOPs operam no modo linear. Isso significa que a tensão de saída fica limitada a

$$-V_{CC} \leq v_o \leq V_{CC} \tag{5.4}$$

Embora sempre devamos operar com o AOP na região linear, deve-se ter em mente a possibilidade de saturação em projetos envolvendo amplificadores operacionais, para evitar o projeto de circuitos com amplificadores operacionais que não funcionarão em laboratório.

Ao longo deste livro, consideraremos que um AOP opera no intervalo linear. Tenha em mente a restrição de tensão do AOP nesse modo.

EXEMPLO 5.1

Um AOP 741 tem ganho de tensão de malha aberta igual a 2×10^5, resistência de entrada de 2 MΩ e resistência de saída de 50 Ω. O AOP é usado no circuito da Figura 5.6*a*. Determine o ganho de malha fechada, v_o/v_s. Determine a corrente i quando $v_s = 2$ V.

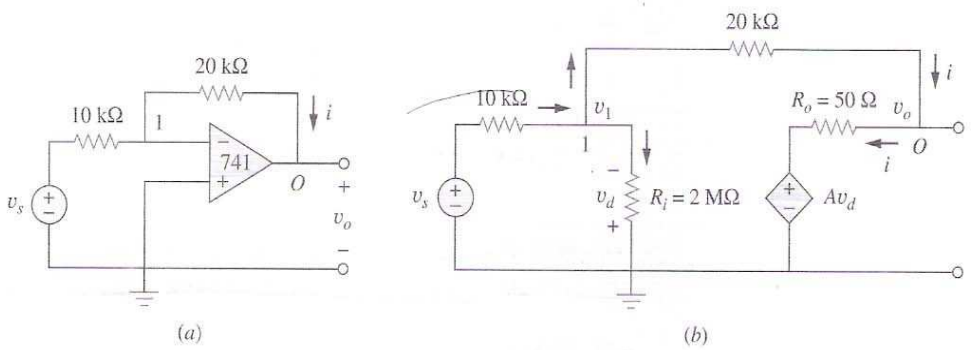


Figura 5.6 Esquema para o Exemplo 5.1: (*a*) circuito original; (*b*) circuito equivalente.

Solução: Usando o modelo de AOP da Figura 5.4, obtemos o circuito equivalente da Figura 5.6*a*, conforme ilustrado na *b*. Em seguida, resolvemos o circuito da Figura 5.6*b* utilizando análise nodal. No nó 1, a LKC resulta em

$$\frac{v_s - v_1}{10 \times 10^3} = \frac{v_1}{2.000 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3}$$

Multiplicando por 2.000×10^3, obtemos

$$200v_s = 301v_1 - 100v_o$$

ou

$$2v_s \simeq 3v_1 - v_o \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2v_s + v_o}{3} \tag{5.1.1}$$

No nó O,

$$\frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = \frac{v_o - Av_d}{50}$$

Porém, $v_d = -v_1$ e $A = 200.000$. Então

$$v_1 - v_o = 400(v_o + 200.000v_1) \tag{5.1.2}$$

Substituindo v_1 da Equação (5.1.1) na Equação (5.1.2), temos

$$0 \simeq 26.667.067v_o + 53.333.333v_s \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{v_s} = -1{,}9999699$$

Esse é o ganho de malha fechada, pois o resistor de realimentação de 20 kΩ fecha o circuito entre os terminais de saída e de entrada. Quando $v_s = 2$ V, $v_o = -3{,}9999398$ V. A partir da Equação (5.1.1), obtemos $v_1 = 20{,}066667\ \mu$V. Portanto,

$$i = \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = 0{,}19999 \text{ mA}$$

Fica evidente que trabalhar com um AOP real é enfadonho, já que estamos lidando com números muito grandes.

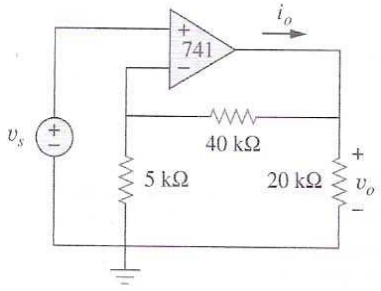


Figura 5.7 Esquema para o Problema prático 5.1.

PROBLEMA PRÁTICO 5.1

Se o mesmo AOP 741 do Exemplo 5.1 for usado no circuito da Figura 5.7, calcule o ganho de malha fechada, v_o/v_s. Determine i_o quando $v_s = 1$ V.

Resposta: 9,00041; 657 μA.

5.3 Amplificador operacional ideal

Para facilitar o entendimento de circuitos com amplificadores operacionais, suporemos o emprego de AOPs ideais. Um AOP é ideal se ele apresentar as seguintes características:

1. Ganho de malha aberta infinito ($A \simeq \infty$).
2. Resistência de entrada infinita ($R_i \simeq \infty$).
3. Resistência de saída zero ($R_o \simeq 0$).

Um **amplificador operacional ideal** é um amplificador com ganho de malha aberta infinito, resistência de entrada infinita e resistência de saída zero.

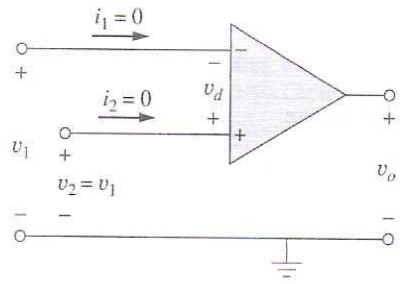


Figura 5.8 Modelo de AOP ideal.

Embora deduzir que um AOP ideal forneça apenas uma análise aproximada, a maioria dos amplificadores modernos possui ganhos e impedâncias de entrada tão elevados que uma análise aproximada já é suficiente. A menos que informado o contrário, a partir de agora suporemos que todos os amplificadores operacionais usados sejam ideais.

Para análise de circuitos, o AOP ideal é ilustrado na Figura 5.8, que é derivado do modelo real na Figura 5.4. Duas características importantes do AOP ideal são:

1. Correntes em ambos os terminais de entrada são nulas:

$$\boxed{i_1 = 0, \quad i_2 = 0} \tag{5.5}$$

Isso se deve à resistência de entrada infinita, esta que entre os terminais de entrada implica que existe um circuito aberto e a corrente não é capaz de entrar no AOP. Mas a corrente de saída não é, necessariamente, igual a zero, de acordo com a Equação (5.1).

2. Tensão entre os terminais de entrada é igual a zero; isto é,

$$v_d = v_2 - v_1 = 0 \tag{5.6}$$

ou

$$\boxed{v_1 = v_2} \tag{5.7}$$

Portanto, um AOP ideal tem corrente zero em seus dois terminais de entrada e a tensão entre os dois terminais de entrada é igual a zero. As Equações (5.5) e (5.7) são extremamente importantes e devem ser consideradas como as chaves para a análise de circuitos envolvendo amplificadores operacionais.

As duas características podem ser exploradas notando-se que, para cálculos de tensão, a porta de entrada se comporta como um curto-circuito, enquanto para cálculos de corrente, a porta de entrada se comporta como um circuito aberto.

EXEMPLO 5.2

Refaça o Problema prático 5.1 usando o modelo de AOP ideal.

Solução: Podemos substituir o AOP na Figura 5.7 por seu modelo equivalente na Figura 5.9, conforme fizemos no Exemplo 5.1. Mas, na verdade, não precisamos fazer isso, basta ter em mente as Equações (5.5) e (5.7) à medida que analisamos o circuito da Figura 5.7. Por essa razão, o circuito da Figura 5.7 é apresentado como na Figura 5.9. Note que

$$v_2 = v_s \tag{5.2.1}$$

Já que $i_1 = 0$, os resistores de 40 kΩ e de 5 kΩ estão em série; a mesma corrente passa por eles. v_1 é a tensão no resistor de 5 kΩ. Portanto, usando o princípio da divisão de tensão,

$$v_1 = \frac{5}{5 + 40} v_o = \frac{v_o}{9} \tag{5.2.2}$$

De acordo com a Equação (5.7),

$$v_2 = v_1 \tag{5.2.3}$$

Substituindo as Equações (5.2.1) e (5.2.2) na Equação (5.2.3) resulta no ganho de malha fechada,

$$v_s = \frac{v_o}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{v_s} = 9 \tag{5.2.4}$$

que está muito próximo ao valor 9,00041 obtido com o modelo real no Problema prático 5.1. Isso demonstra que pequenos erros desprezíveis resultam de termos suposto o uso de um AOP ideal.

No nó o,

$$i_o = \frac{v_o}{40 + 5} + \frac{v_o}{20} \text{mA} \tag{5.2.5}$$

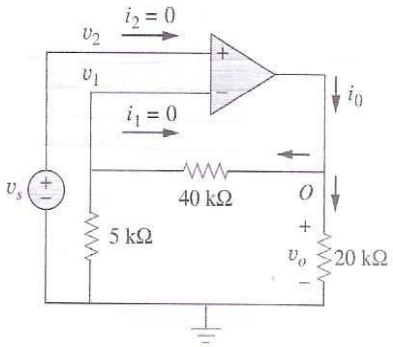


Figura 5.9 Esquema para o Exemplo 5.2.

Da Equação (5.2.4), quando $v_s = 1$ V, $v_o = 9$ V. Substituir $v_o = 9$ V na Equação (5.2.5) produz

$$i_o = 0{,}2 + 0{,}45 = 0{,}65 \text{ mA}$$

Novamente, esse resultado está próximo ao valor 0,657 mA obtido no Problema prático 5.1 obtido com o modelo real.

PROBLEMA PRÁTICO 5.2

Repita o Exemplo 5.1 usando o modelo de AOP ideal.

Resposta: –2; 200 μA.

5.4 Amplificador inversor

Nesta e nas seções posteriores, consideraremos alguns circuitos úteis com o emprego de amplificadores operacionais que normalmente atuam como módulos no projeto de circuitos mais complexos. O primeiro desses circuitos com AOP é o amplificador inversor mostrado na Figura 5.10, onde a entrada não inversora é aterrada, v_i é conectada à entrada inversora através de R_1, e o resistor de realimentação R_f é conectado entre a saída e a entrada inversora. Nosso objetivo é obter a relação entre a tensão de entrada v_i e a tensão de saída v_o. Aplicando a LKC ao nó 1,

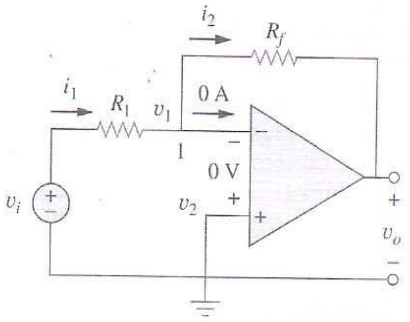


Figura 5.10 Amplificador inversor.

$$i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \tag{5.8}$$

Uma característica fundamental do amplificador inversor é que tanto o sinal de entrada quanto o de realimentação estão aplicados ao terminal inversor do AOP.

Porém, para um AOP ideal, $v_1 = v_2 = 0$, já que o terminal não inversor está aterrado. Portanto,

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_f}$$

ou

$$\boxed{v_o = -\frac{R_f}{R_1} v_i} \tag{5.9}$$

Note que existem dois tipos de ganhos: nesse caso, temos o ganho de tensão de malha fechada Av, enquanto o amplificador operacional em si tem um ganho de tensão de malha aberta A.

O ganho de tensão is $A_v = v_o/v_i = -R_f/R_1$. A designação do circuito da Figura 5.10 como um *inversor* provém do sinal negativo. Por esse motivo,

> Um **amplificador inversor** inverte a polaridade do sinal de entrada amplificando-o ao mesmo tempo.

Perceba que o ganho é a resistência de realimentação dividida pela resistência de entrada, o que significa que o ganho depende apenas dos elementos externos conectados ao AOP. Em vista da Equação (5.9), um circuito equivalente para o amplificador inversor é mostrado na Figura 5.11. O amplificador inversor é usado, por exemplo, em um conversor corrente-tensão.

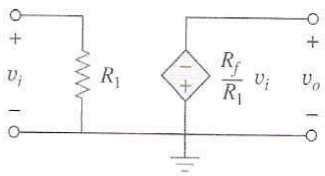


Figura 5.11 Circuito equivalente para o inversor da Figura 5.10.

EXEMPLO 5.3

Observe o AOP da Figura 5.12. Se $v_i = 0{,}5$ V, calcule: (*a*) tensão de saída v_o; e (*b*) corrente no resistor de 10 kΩ.

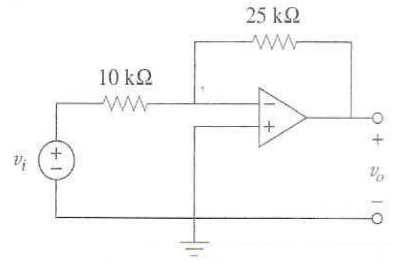


Figura 5.12 Esquema para o Exemplo 5.3.

Solução:

(a) Usando a Equação (5.9),

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_f}{R_1} = -\frac{25}{10} = -2{,}5$$

$$v_o = -2{,}5v_i = -2{,}5(0{,}5) = -1{,}25 \text{ V}$$

(b) A corrente que passa pelo resistor de 10 kΩ é

$$i = \frac{v_i - 0}{R_1} = \frac{0{,}5 - 0}{10 \times 10^3} = 50\ \mu\text{A}$$

PROBLEMA PRÁTICO 5.3

Determine a saída do circuito com AOP mostrado na Figura 5.13. Calcule a corrente que passa pelo resistor de realimentação.

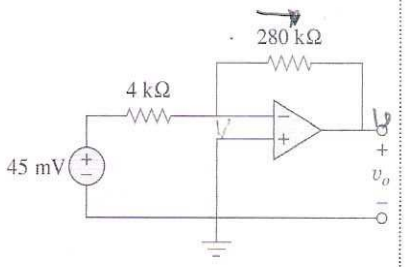


Figura 5.13 Esquema para o Problema prático 5.3.

Resposta: −3,15 V, 26,25 μA.

EXEMPLO 5.4

Determine v_o no circuito com AOP mostrado na Figura 5.14.

Solução: Aplicando a LKC ao nó *a*,

$$\frac{v_a - v_o}{40\text{ k}\Omega} = \frac{6 - v_a}{20\text{ k}\Omega}$$

$$v_a - v_o = 12 - 2v_a \quad \Rightarrow \quad v_o = 3v_a - 12$$

Porém, $v_a = v_b = 2$ V para um AOP ideal, em virtude da queda de tensão zero entre os terminais de entrada do AOP. Portanto,

$$v_o = 6 - 12 = -6 \text{ V}$$

Note que se $v_b = 0 = v_a$, então $v_o = -12$, conforme esperado da Equação (5.9).

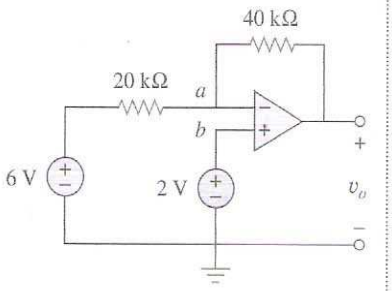


Figura 5.14 Esquema para o Exemplo 5.4.

PROBLEMA PRÁTICO 5.4

São mostrados dois tipos de conversores corrente-tensão (também conhecidos como *amplificadores de transresistência*) na Figura 5.15.

(a) Demonstre que, para o conversor da Figura 5.15*a*,

$$\frac{v_o}{i_s} = -R$$

(b) Demonstre que, para o conversor da Figura 5.15*b*,

$$\frac{v_o}{i_s} = -R_1\left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2}\right)$$

Resposta: Prova.

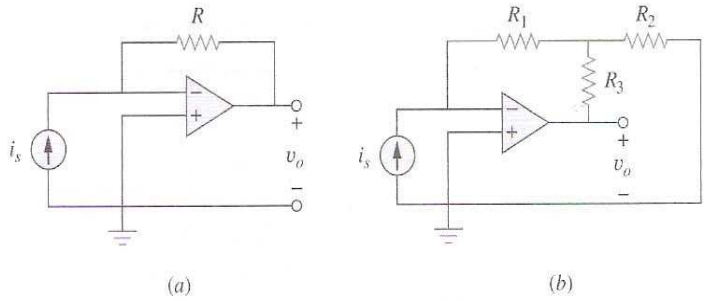


Figura 5.15 Esquema para o Problema prático 5.4.

5.5 Amplificador não inversor

Outra aplicação importante do AOP é o amplificador não inversor mostrado na Figura 5.16. Nesse caso, a tensão de entrada v_i é aplicada diretamente ao terminal da entrada não inversora, e o resistor R_1 é conectado entre o terra e o terminal inversor. Estamos interessados na tensão de saída e no ganho de tensão. A aplicação da LKC no terminal inversor resulta em

$$i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{0 - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \tag{5.10}$$

Mas $v_1 = v_2 = v_i$. A Equação (5.10) fica

$$\frac{-v_i}{R_1} = \frac{v_i - v_o}{R_f}$$

ou

$$\boxed{v_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_i} \tag{5.11}$$

O ganho de tensão é $A_v = v_o/v_i = 1 + R_f/R_1$, que não tem um sinal negativo. Portanto, a saída tem a mesma polaridade que a entrada.

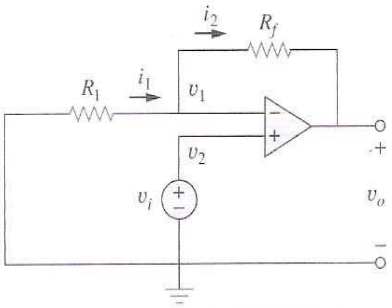


Figura 5.16 Amplificador não inversor.

Um **amplificador não inversor** é um circuito com amplificador operacional projetado para fornecer um ganho de tensão positivo.

Novamente, notamos que o ganho depende apenas dos resistores externos.

Perceba que se o resistor de realimentação $R_f = 0$ (curto-circuito) ou $R_1 = \infty$ (circuito aberto) ou ambos, o ganho se torna 1. Sob essas condições ($R_f = 0$ e $R_1 = \infty$), o circuito da Figura 5.16 se torna aquele mostrado na Figura 5.17, que é chamado *seguidor de tensão* (ou *amplificador de ganho unitário*), pois a saída segue a entrada. Assim, para um seguidor de tensão

$$\boxed{v_o = v_i} \tag{5.12}$$

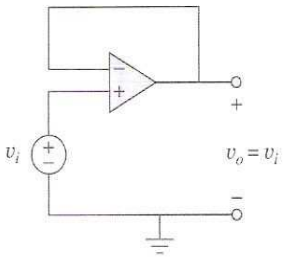


Figura 5.17 Seguidor de tensão.

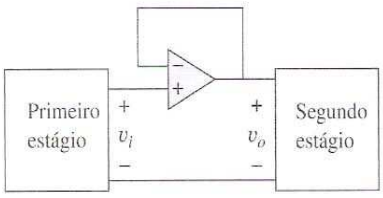


Figura 5.18 Seguidor de tensão usado para isolar dois estágios em cascata de um circuito.

Um circuito desses tem uma impedância de entrada muito alta e, portanto, é útil como um amplificador de estágio intermediário (ou *buffer*) para isolar um circuito do outro, conforme representado na Figura 5.18. O seguidor de tensão minimiza a interação entre os dois estágios e elimina o efeito de carga entre estágios.

EXEMPLO 5.5

Para o circuito com AOP da Figura 5.19, calcule a tensão de saída v_o.

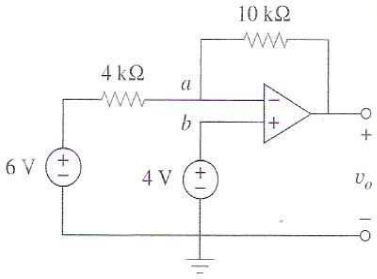


Figura 5.19 Esquema para o Exemplo 5.5.

Solução: Podemos resolver isso de duas maneiras: usando superposição ou análise nodal.

■ **MÉTODO 1** Usando superposição, fazemos

$$v_o = v_{o1} + v_{o2}$$

onde v_{o1} se deve à fonte de tensão de 6 V, e v_{o2}, à entrada de 4 V. Para obter v_{o1}, configuramos a fonte de 4 V igual a zero. Sob tal condição, o circuito se torna um inversor. Portanto, a Equação (5.9) dá

$$v_{o1} = -\frac{10}{4}(6) = -15 \text{ V}$$

Para se obter v_{o2}, configuramos a fonte de 6 V igual a zero. O circuito se transforma em um amplificador não inversor de modo que a Equação (5.11) se aplica.

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{10}{4}\right)4 = 14 \text{ V}$$

Logo,

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = -15 + 14 = -1 \text{ V}$$

■ **MÉTODO 2** Aplicando a lei dos nós ao nó a,

$$\frac{6 - v_a}{4} = \frac{v_a - v_o}{10}$$

Porém $v_a = v_b = 4$, e, portanto,

$$\frac{6 - 4}{4} = \frac{4 - v_o}{10} \quad \Rightarrow \quad 5 = 4 - v_o$$

ou $v_o = -1$ V, como obtido pelo outro método.

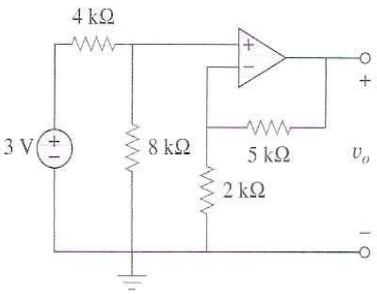


Figura 5.20 Esquema para o Problema prático 5.5.

PROBLEMA PRÁTICO 5.5

Calcule v_o no circuito da Figura 5.20.

Resposta: 7 V.

5.6 Amplificador somador

Além da amplificação, o AOP pode realizar adições e subtrações. A adição é executada pelo amplificador somador visto nesta seção; a subtração é realizada pelo amplificador diferencial, que será visto na seção seguinte.

Um **amplificador somador** é um circuito com amplificador operacional que combina várias entradas e produz uma saída que é a soma ponderada das entradas.

O amplificador somador, mostrado na Figura 5.21, é uma variação do amplificador inversor. Ele tira proveito do fato de que a configuração inversora é capaz de manipular diversas entradas ao mesmo tempo. Devemos ter em mente que a corrente que entra em cada entrada do AOP é zero. Aplicando a LKC ao nó a temos

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{5.13}$$

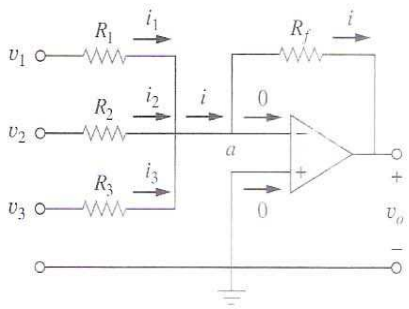


Figura 5.21 Amplificador somador.

Porém,

$$i_1 = \frac{v_1 - v_a}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v_2 - v_a}{R_2}$$
$$i_3 = \frac{v_3 - v_a}{R_3}, \quad i = \frac{v_a - v_o}{R_f} \tag{5.14}$$

Notamos que $v_a = 0$ e, substituindo a Equação (5.14) na Equação (5.13), obtemos

$$\boxed{v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right)} \tag{5.15}$$

indicando que a tensão de saída é uma soma ponderada das entradas. Por essa razão, o circuito da Figura 5.21 é denominado *somador*. E não é preciso dizer que o somador pode ter mais de três entradas.

EXEMPLO 5.6

Calcule v_o e i_o no circuito com AOP da Figura 5.22.

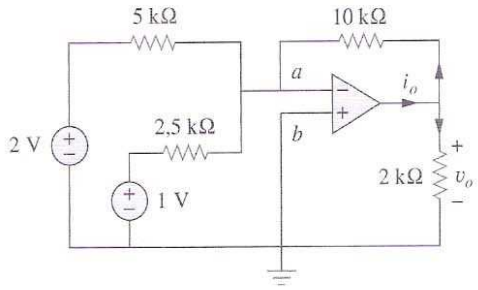


Figura 5.22 Esquema para o Exemplo 5.6.

Solução: Esse é um somador com duas entradas. Usando a Equação (5.15), temos

$$v_o = -\left[\frac{10}{5}(2) + \frac{10}{2{,}5}(1)\right] = -(4 + 4) = -8 \text{ V}$$

A corrente i_o é a soma das correntes que passam pelos resistores de 10 kΩ e 2 kΩ, os quais apresentam tensão $v_o = -8$ V neles, já que $v_a = v_b = 0$. Portanto,

$$i_o = \frac{v_o - 0}{10} + \frac{v_o - 0}{2}\text{mA} = -0{,}8 - 4 = -4{,}8 \text{ mA}$$

PROBLEMA PRÁTICO 5.6

Determine v_o e i_o no circuito com AOP mostrado na Figura 5.23.

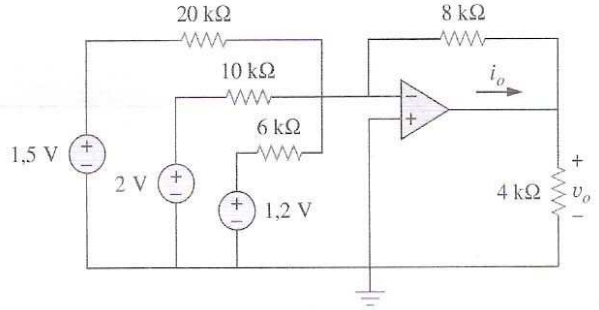


Figura 5.23 Esquema para o Problema prático 5.6.

Resposta: −3,8 V, −1,425 mA.

5.7 Amplificador diferencial

Os amplificadores de diferença (ou diferenciais) são usados em várias aplicações em que há necessidade de se amplificar a diferença entre dois sinais de entrada. Eles são primos de primeiro grau do *amplificador para instrumentação*, o amplificador mais útil e popular, sobre o qual falaremos na Seção 5.10.

O amplificador diferencial também é conhecido como *subtrator*, sobre o qual saberemos mais adiante.

Um **amplificador diferencial** é um dispositivo que amplifica a diferença entre duas entradas, porém rejeita quaisquer sinais comuns às duas entradas.

Considere o circuito com AOP mostrado na Figura 5.24. Tenha em mente que correntes nulas entram nos terminais do AOP. Aplicando a LKC ao nó *a*,

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_o}{R_2}$$

ou

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)v_a - \frac{R_2}{R_1}v_1 \tag{5.16}$$

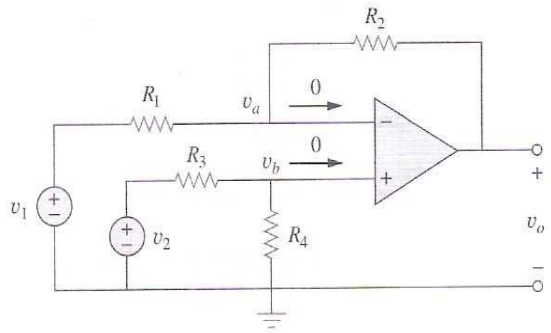


Figura 5.24 Amplificador diferencial.

Aplicando a LKC ao nó *b*,

$$\frac{v_2 - v_b}{R_3} = \frac{v_b - 0}{R_4}$$

ou

$$v_b = \frac{R_4}{R_3 + R_4}v_2 \tag{5.17}$$

Mas $v_a = v_b$. Substituir a Equação (5.17) na Equação (5.16) resulta em

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)\frac{R_4}{R_3 + R_4}v_2 - \frac{R_2}{R_1}v_1$$

ou

$$\boxed{v_o = \frac{R_2(1 + R_1/R_2)}{R_1(1 + R_3/R_4)}v_2 - \frac{R_2}{R_1}v_1} \tag{5.18}$$

Já que um amplificador diferencial deve rejeitar um sinal comum às duas entradas, o amplificador tem de ter a propriedade em que $v_o = 0$, quando $v_1 = v_2$. Isso existe quando

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{5.19}$$

Portanto, quando o circuito com AOP opera como um amplificador diferencial, a Equação (5.18) fica

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) \tag{5.20}$$

Se $R_2 = R_1$ e $R_3 = R_4$, o amplificador diferencial se torna um *subtrator*, com a saída

$$v_o = v_2 - v_1 \tag{5.21}$$

EXEMPLO 5.7

Projete um circuito com AOP com entradas v_1 e v_2, tais que $v_o = -5v_1 + 3v_2$.

Solução: O circuito requer que

$$v_o = 3v_2 - 5v_1 \tag{5.7.1}$$

Esse circuito pode ser construído de duas formas.

Projeto 1 Se quisermos usar apenas um AOP, podemos usar o circuito com AOP da Figura 5.24. Comparando a Equação (5.7.1) com a Equação (5.18), vemos que

$$\frac{R_2}{R_1} = 5 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 5R_1 \tag{5.7.2}$$

Da mesma forma,

$$5\frac{(1 + R_1/R_2)}{(1 + R_3/R_4)} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{6}{5}}{1 + R_3/R_4} = \frac{3}{5}$$

ou

$$2 = 1 + \frac{R_3}{R_4} \quad \Rightarrow \quad R_3 = R_4 \tag{5.7.3}$$

Se optarmos por $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$ e $R_3 = 20\ \text{k}\Omega$, então $R_2 = 50\ \text{k}\Omega$ e $R_4 = 20\ \text{k}\Omega$.

Projeto 2 Se quisermos usar mais de um AOP, poderíamos colocar em cascata um amplificador inversor e um somador inversor de duas entradas, conforme nos mostra a Figura 5.25. Para o somador,

$$v_o = -v_a - 5v_1 \tag{5.7.4}$$

e para o inversor,

$$v_a = -3v_2 \tag{5.7.5}$$

Combinando as equações (5.7.4) e (5.7.5), obtemos

$$v_o = 3v_2 - 5v_1$$

que é o resultado desejado. Na Figura 5.25, podemos selecionar $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$ e $R_3 = 20\ \text{k}\Omega$ ou $R_1 = R_3 = 10\ \text{k}\Omega$.

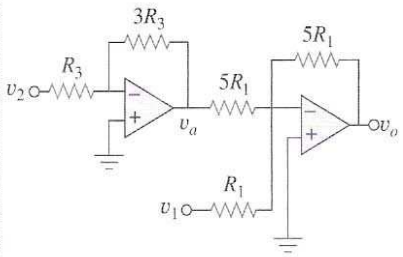


Figura 5.25 Esquema para o Exemplo 5.7.

PROBLEMA PRÁTICO 5.7

Desenhe um amplificador diferencial com ganho 7,5.

Resposta: Típico: $R_1 = R_3 = 20\ \text{k}\Omega$, $R_2 = R_4 = 150\ \text{k}\Omega$.

EXEMPLO 5.8

Um *amplificador de instrumentação* mostrado na Figura 5.26 é um amplificador de sinais de baixo nível usado em controle de processos ou em aplicações de medição, e se encontra disponível comercialmente em um único encapsulamento (CI). Demonstre que

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R_4}\right)(v_2 - v_1)$$

Solução: Reconhecemos que o amplificador A_3 da Figura 5.26 é um amplificador diferencial. Portanto, da Equação (5.20),

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_{o2} - v_{o1}) \tag{5.8.1}$$

Já que os amplificadores operacionais A_1 e A_2 não drenam nenhuma corrente, a corrente i flui pelos três resistores como se eles estivessem em série. Portanto,

$$v_{o1} - v_{o2} = i(R_3 + R_4 + R_3) = i(2R_3 + R_4) \tag{5.8.2}$$

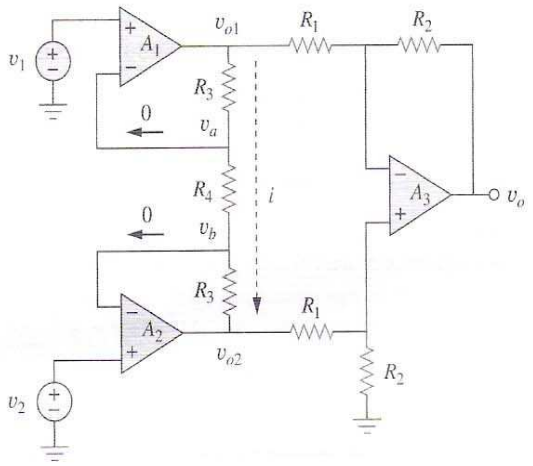


Figura 5.26 Amplificador de instrumentação; esquema para o Exemplo 5.8.

Porém,

$$i = \frac{v_a - v_b}{R_4}$$

e $v_a = v_1$; $v_b = v_2$. Consequentemente,

$$i = \frac{v_1 - v_2}{R_4} \tag{5.8.3}$$

Inserindo as Equações (5.8.2) e (5.8.3) na Equação (5.8.1), temos

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R_4}\right)(v_2 - v_1)$$

conforme exigido. Discutiremos em detalhes o amplificador para instrumentação na Seção 5.10.

PROBLEMA PRÁTICO 5.8

Obtenha i_o no amplificador de instrumentação da Figura 5.27.

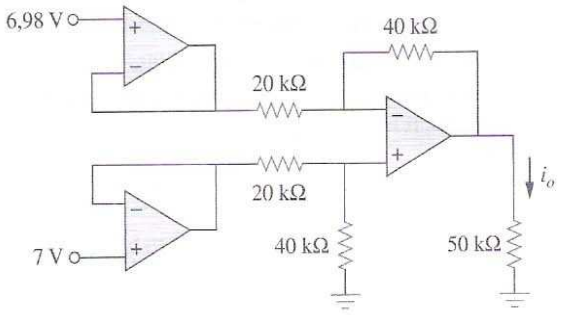


Figura 5.27 Amplificador de instrumentação; esquema para o Problema prático 5.8.

Resposta: –800 μA.

5.8 Circuitos com amplificadores operacionais em cascata

Como sabemos, os circuitos com amplificadores operacionais são módulos ou componentes básicos para projeto de circuitos complexos. Em aplicações práticas, muitas vezes é necessário conectar circuitos com amplificadores operacionais em cascata (isto é, a saída do primeiro na entrada do segundo) para se obter um ganho geral maior. Normalmente, dois circuitos estão em cascata quando são interligados em sequência, um após o outro em uma única fila.

Uma **conexão em cascata** é um arranjo em sequência de dois ou mais circuitos com amplificadores operacionais conectados de forma que a saída de um seja na entrada do seguinte.

Quando circuitos com AOPs estão em cascata, cada circuito em sucessão é denominado *estágio*; o sinal de entrada original é amplificado pelo ganho do estágio individual. Circuitos com amplificadores operacionais apresentam a vantagem de ser ligados em cascata sem alterar as relações entrada/saída. Isso porque cada circuito com AOP (ideal) possui resistência de entrada infinita e resistência de saída nula. A Figura 5.28 mostra uma representação em forma de diagramas em bloco de três circuitos com amplificadores operacionais em cascata. Uma vez que a saída de um estágio é a entrada do estágio seguinte, o ganho geral da interligação em cascata é o produto dos ganhos de cada circuito com AOP, ou

$$A = A_1 A_2 A_3 \tag{5.22}$$

Embora a conexão em cascata não afete as relações entrada/saída dos amplificadores operacionais, deve-se tomar cuidado no projeto de um circuito com AOPs reais de modo a garantir que a carga devida ao próximo estágio na cascata não sature o AOP.

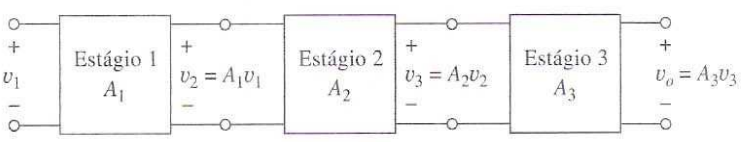


Figura 5.28 Conexão em cascata de três estágios.

EXEMPLO 5.9

Determine v_o e i_o no circuito da Figura 5.29.

Solução: Esse circuito é formado por dois amplificadores não inversores em cascata. Na saída do primeiro AOP,

$$v_a = \left(1 + \frac{12}{3}\right)(20) = 100 \text{ mV}$$

Na saída do segundo AOP,

$$v_o = \left(1 + \frac{10}{4}\right)v_a = (1 + 2{,}5)100 = 350 \text{ mV}$$

A corrente i_o necessária é a corrente que passa pelo resistor de 10 kΩ.

$$i_o = \frac{v_o - v_b}{10} \text{ mA}$$

Porém, $v_b = v_a = 100$ mV. Portanto,

$$i_o = \frac{(350 - 100) \times 10^{-3}}{10 \times 10^3} = 25\ \mu\text{A}$$

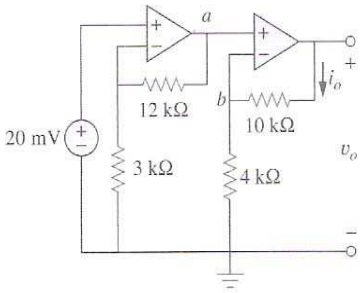


Figura 5.29 Esquema para o Exemplo 5.9.

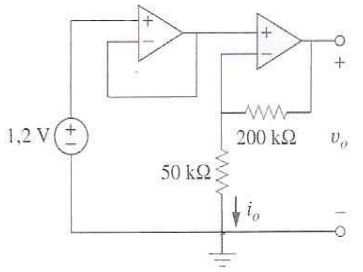


Figura 5.30 Esquema para o Problema prático 5.9.

PROBLEMA PRÁTICO 5.9

Determine v_o e i_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.30.

Resposta: 6 V, 24 μA.

EXEMPLO 5.10

Se $v_1 = 1$ V e $v_2 = 2$ V, determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.31.

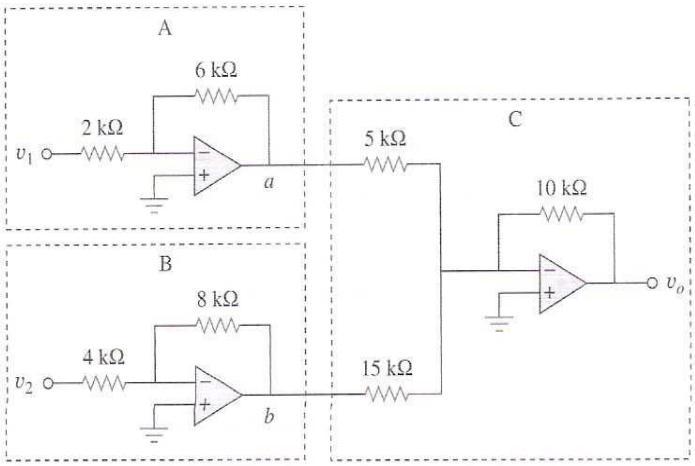


Figura 5.31 Esquema para o Exemplo 5.10.

Solução:

1. ***Definição.*** O problema está claramente definido.
2. ***Apresentação.*** Com uma entrada $v_1 = 1$ V e $v_2 = 2$ V, determine a tensão de saída do circuito mostrado na Figura 5.31. O circuito com amplificadores operacionais é, na verdade, composto por três circuitos. O primeiro deles atua como um amplificador de ganho $-3(-6\text{ kΩ}/2\text{ kΩ})$ para v_1 e o segundo funciona como um amplificador de ganho $-2(-8\text{ kΩ}/4\text{ kΩ})$ para v_2. O último circuito atua como um somador de dois ganhos diferentes para a saída dos outros dois circuitos.

3. ***Alternativa.*** Existem diversas maneiras de se trabalhar com esse circuito. Já que ele envolve amplificadores operacionais ideais, então uma abordagem puramente matemática vai funcionar de forma bem fácil. O segundo método seria usar o *PSpice* como uma confirmação do método matemático.
4. ***Tentativa.*** Façamos que a saída do primeiro circuito com AOP se chame v_{11} e a saída do segundo circuito com AOP, v_{22}. Em seguida, obtemos

$$v_{11} = -3v_1 = -3 \times 1 = -3 \text{ V},$$
$$v_{22} = -2v_2 = -2 \times 2 = -4 \text{ V}$$

No terceiro circuito, temos

$$\begin{aligned} v_o &= -(10 \text{ k}\Omega/5 \text{ k}\Omega)v_{11} + [-(10 \text{ k}\Omega/15 \text{ k}\Omega)v_{22}] \\ &= -2(-3) - (2/3)(-4) \\ &= 6 + 2{,}667 = \mathbf{8{,}667 \text{ V}} \end{aligned}$$

5. ***Avaliação.*** A fim de avaliarmos adequadamente nossa solução, precisamos identificar uma verificação razoável. Nesse caso, poderíamos facilmente usar o *PSpice*.

   Agora, podemos simular isso no *PSpice*. Vemos os resultados apresentados na Figura 5.32.

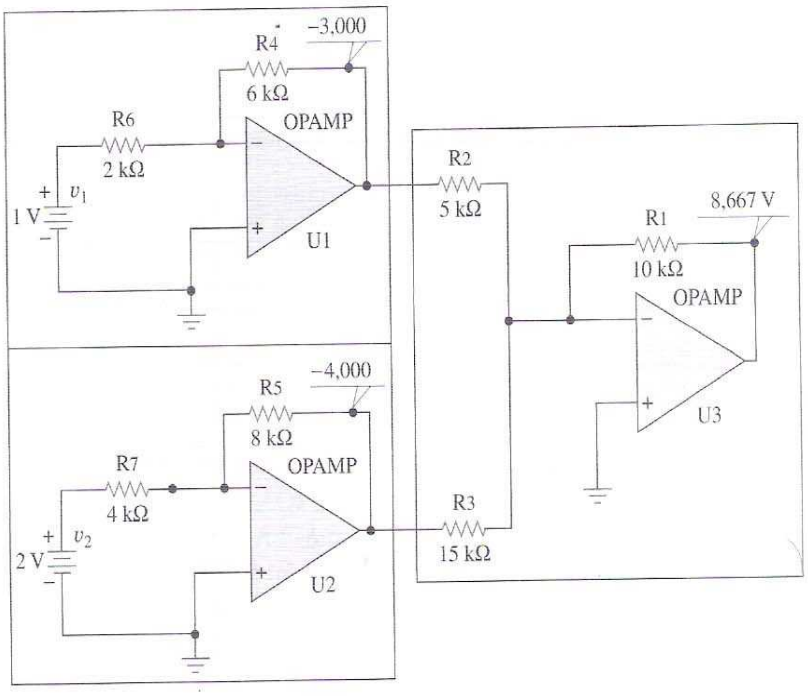


Figura 5.32 Esquema para o Exemplo 5.10.

Podemos notar que obtivemos os mesmos resultados usando duas técnicas completamente diferentes (a primeira é tratar os circuitos com amplificadores operacionais como simples ganhos e um somador, e a segunda usando análise de circuitos com o *PSpice*). Esse é um método muito interessante de garantir que temos a resposta correta.

6. ***Satisfatório?*** Estamos satisfeitos com a obtenção dos resultados solicitados. Agora, podemos apresentar nosso trabalho como uma solução ao problema.

PROBLEMA PRÁTICO 5.10

Se $v_1 = 7$ V e $v_2 = 3{,}1$ V, determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.33.

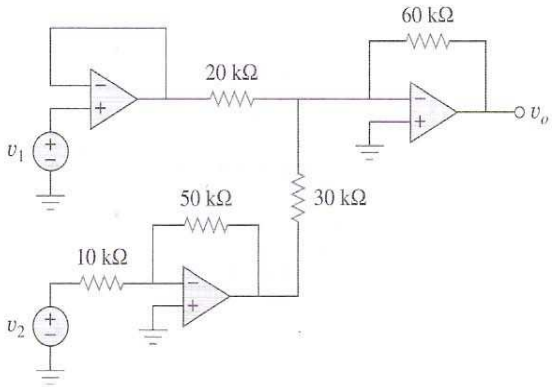
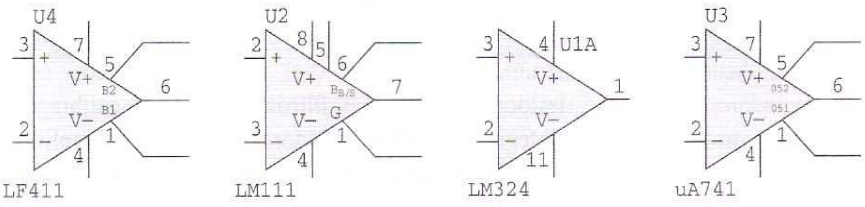


Figura 5.33 Esquema para o Problema prático 5.10.

Resposta: 10 V.

5.9 Análise de circuitos com amplificadores operacionais usando o *PSpice*

O *PSpice for Windows* não possui um modelo para um AOP ideal, embora seja possível criar um como um subcircuito usando a opção *Create Subcircuit* no menu *Tools*. Em vez de criar um AOP ideal, usaremos um dos quatro amplificadores operacionais reais disponíveis no mercado e fornecidos na biblioteca *eval.slb* do *PSpice*. Os modelos de AOP têm os nomes de componente LF411, LM111, LM324 e uA741, conforme mostrado na Figura 5.34. Cada um deles pode ser obtido em **Draw/Get New Part/libraries. . . /eval.lib**, ou simplesmente selecionando **Draw/Get New Part** e digitando o nome do componente na caixa de diálogo *PartName*, como usual. Note que cada um deles requer fontes CC, sem as quais o AOP não funcionará. Essas fontes deveriam ser conectadas como mostrado na Figura 5.3.



(*a*) Subcircuito de AOP com entrada JFET

(*b*) Subcircuito de AOP

(*c*) Subcircuito de AOP com cinco conexões

(*d*) Subcircuito de AOP com cinco conexões

Figura 5.34 Modelos de amplificadores operacionais reais disponível no *PSpice*.

EXEMPLO 5.11

Use o *PSpice* para resolver o circuito com amplificadores operacionais do Exemplo 5.1.

Solução: Usando o Schematics, desenhamos o circuito na Figura 5.6*a* como mostrado na Figura 5.35. Note que o terminal positivo da fonte de tensão v_s é conectado ao terminal inversor (pino 2) através do resistor 10 kΩ, enquanto o terminal não inversor (pino 3) é aterrado conforme requisitado na Figura 5.6*a*. Da mesma forma, observe como o AOP é alimentado; o terminal positivo V+ da fonte de alimentação (pino 7) é conectado a uma fonte de tensão CC de 15 V, enquanto o terminal negativo V– da fonte de alimentação (pino 4) está conectado a –15V. Os pinos 1 e 5 foram deixados flutuando (em aberto), porque eles são usados para ajustar o offset, que não nos interessa neste capítulo. Além de acrescentar as fontes de alimentação CC ao circuito original na Figura 5.6*a*, também adicionamos os pseudocomponentes VIEWPOINT e IPROBE para medir, respectivamente, a tensão de saída v_o no pino 6 e a corrente i necessária que passa pelo resistor de 20 kΩ.

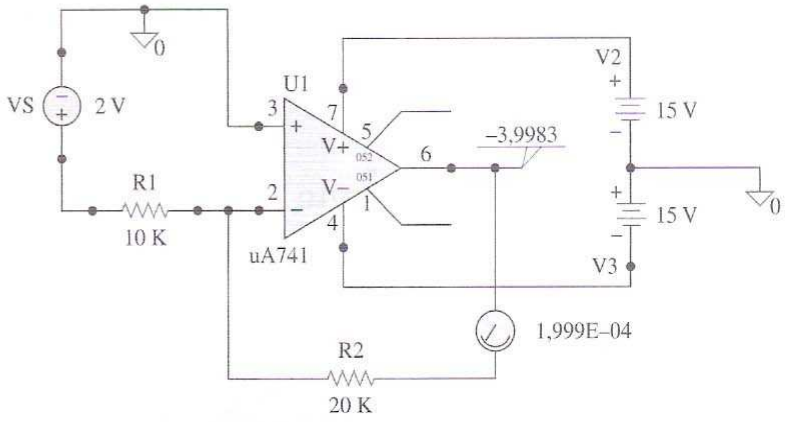


Figura 5.35 Esquema para o Exemplo 5.11.

Após salvar o esquema, simulamos o circuito selecionando **Analysis/Simulate** e temos os resultados apresentados em VIEWPOINT e IPROBE. A partir dos resultados, o ganho de circuito fechado é

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-3{,}9983}{2} = -1{,}99915$$

e $i = 0{,}1999$ mA, de acordo com os resultados obtidos analiticamente no Exemplo 5.1.

PROBLEMA PRÁTICO 5.11

Refaça o Problema prático 5.1 usando o *PSpice*.

Resposta: 9,0027, 650,2 μA.

5.10 †Aplicações

O AOP é um módulo fundamental na instrumentação eletrônica moderna, ele é usado extensivamente em muitos dispositivos, juntamente com os resistores e outros elementos passivos. Entre suas inúmeras aplicações práticas, temos amplificadores para instrumentação, conversores digitais-analógicos, computadores analógicos, deslocadores de nível, filtros, circuitos de calibragem, inversores, somadores, integradores, diferenciadores, subtratores, amplificadores logarítmicos, comparadores, giradores (*gyrators*), osciladores, retificadores, reguladores, conversores tensão-corrente, conversores corrente-tensão e limitadores. Alguns deles já foram considerados.

Agora veremos duas outras aplicações: o conversor digital-analógico e o *amplificador de instrumentação.*

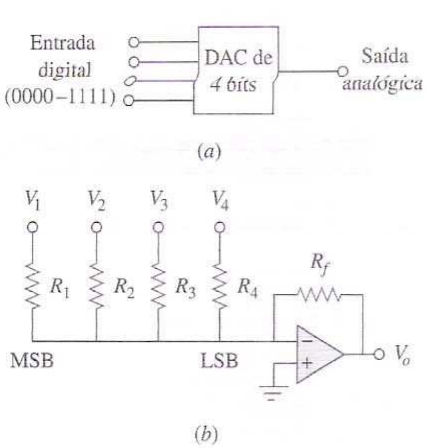


Figura 5.36 DAC de quatro bits: (*a*) diagrama em bloco; (*b*) atenuador progressivo ponderado binário.

5.10.1 Conversor digital-analógico

O conversor digital-analógico (DAC) transforma sinais digitais em forma analógica. Um exemplo típico de um DAC de quatro bits é ilustrado na Figura 5.36*a*. O DAC de quatro bits pode ser implementado de várias formas. Uma implementação simples é a *escada binária ponderada*, mostrada na Figura 5.36*b*. Os bits são ponderados de acordo com a magnitude de sua posição ocupada, pelo valor decrescente R_f/R_n, de modo que cada bit menos significativo tem metade do peso do bit mais significativo seguinte.

Trata-se, obviamente, de um amplificador somador inversor. A saída está relacionada com as entradas, como mostra a Equação (5.15). Portanto,

$$-V_o = \frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3 + \frac{R_f}{R_4}V_4 \qquad (5.23)$$

A entrada V_1 é chamada *bit mais significativo* (MSB), enquanto a entrada V_4 é o *bit menos significativo* (LSB). Cada uma das quatro entradas binárias pode assumir apenas dois níveis de tensão: 0 V ou 1 V. Usando-se a entrada apropriada e os valores de resistor de realimentação, o DAC fornece uma única saída que é proporcional às entradas.

Na prática, os níveis de tensão podem se encontrar geralmente entre 0 V e ±5 V.

EXEMPLO 5.12

No circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.36*b*, consideremos R_f = 10 kΩ, R_1 = 10 kΩ, R_2 = 20 kΩ, R_3 = 40 kΩ e R_4 = 80 kΩ. Obtenha a saída analógica para as entradas binárias [0000], [0001], [0010], ..., [1111].

Solução: Substituindo os valores dados da entrada e os resistores de realimentação na Equação (5.23), obtemos

$$-V_o = \frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3 + \frac{R_f}{R_4}V_4$$

$$= V_1 + 0{,}5V_2 + 0{,}25V_3 + 0{,}125V_4$$

Usando essa equação, uma entrada digital $[V_1V_2V_3V_4]$ = [0000] produz uma saída analógica $-V_o$ = 0 V; $[V_1V_2V_3V_4]$ = [0001] resulta em $-V_o$ = 0,125 V.

De modo similar,

$$[V_1V_2V_3V_4] = [0010] \Rightarrow -V_o = 0{,}25 \text{ V}$$
$$[V_1V_2V_3V_4] = [0011] \Rightarrow -V_o = 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375 \text{ V}$$
$$[V_1V_2V_3V_4] = [0100] \Rightarrow -V_o = 0{,}5 \text{ V}$$
$$\vdots$$
$$[V_1V_2V_3V_4] = [1111] \Rightarrow -V_o = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 = 1{,}875 \text{ V}$$

A Tabela 5.2 sintetiza o resultado da conversão digital-analógica. Note que supomos que cada bit tenha um valor igual a 0,125 V. Portanto, nesse sistema, não

Tabela 5.2 • Valores de entrada e saída de um DAC de quatro bits.

Entrada binária $[V_1V_2V_3V_4]$	Valor decimal	Saída $-V_o$
0000	0	0
0001	1	0,125
0010	2	0,25
0011	3	0,375
0100	4	0,5
0101	5	0,625
0110	6	0,75
0111	7	0,875
1000	8	1,0
1001	9	1,125
1010	10	1,25
1011	11	1,375
1100	12	1,5
1101	13	1,625
1110	14	1,75
1111	15	1,875

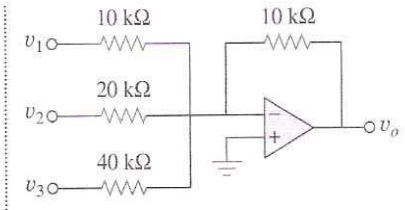


Figura 5.37 DAC de três bits; esquema para o Problema prático 5.12.

podemos representar um valor de tensão entre 1,000 e 1,125, por exemplo. Essa falta de resolução é uma grande limitação das conversões digitais-analógicas. Para maior precisão, é necessária uma representação de palavra com um número de bits maior. Mesmo assim, uma representação digital de uma tensão analógica jamais é exata. Apesar dessa representação inexata, a representação digital tem sido usada para alcançar padrões de qualidade impressionante como CDs de áudio e fotografia digital.

PROBLEMA PRÁTICO 5.12

Um DAC de três bits é mostrado na Figura 5.37.

(a) Determine $|V_o|$ para $[V_1V_2V_3] = [010]$.

(b) Determine $|V_o|$ se $[V_1V_2V_3] = [110]$.

(c) Se $|V_o| = 1{,}25$ V for desejado, qual deveria ser o valor de $[V_1V_2V_3]$?

(d) Para obter $|V_o| = 1{,}75$ V, qual deveria ser o valor de $[V_1V_2V_3]$?

Resposta: 0,5 V; 1,5 V; [101]; [111].

5.10.2 Amplificadores de instrumentação

Um dos circuitos mais úteis e versáteis com o uso de amplificadores operacionais para medições de precisão e controle de processos é o *amplificador de instrumentação* (IA), assim chamado em razão de seu largo emprego em sistemas de medição. Algumas aplicações típicas dos IAs são amplificadores de isolamento, amplificadores de termopares e sistemas de aquisição de dados.

Esse amplificador é uma extensão do amplificador diferencial, uma vez que ele amplifica a diferença entre seus sinais de entrada. Como pode ser observado na Figura 5.26 (ver Exemplo 5.8), um amplificador de instrumentação é formado, geralmente, por três amplificadores operacionais e sete resistores. Por conveniência, o amplificador é mostrado novamente na Figura 5.38*a*, onde os resistores são iguais, exceto pelo resistor externo de ajuste de ganho R_G conectado entre os terminais de ajuste de ganho. A Figura 5.38*b* apresenta seu símbolo esquemático. O Exemplo 5.8 mostra que

$$v_o = A_v(v_2 - v_1) \tag{5.24}$$

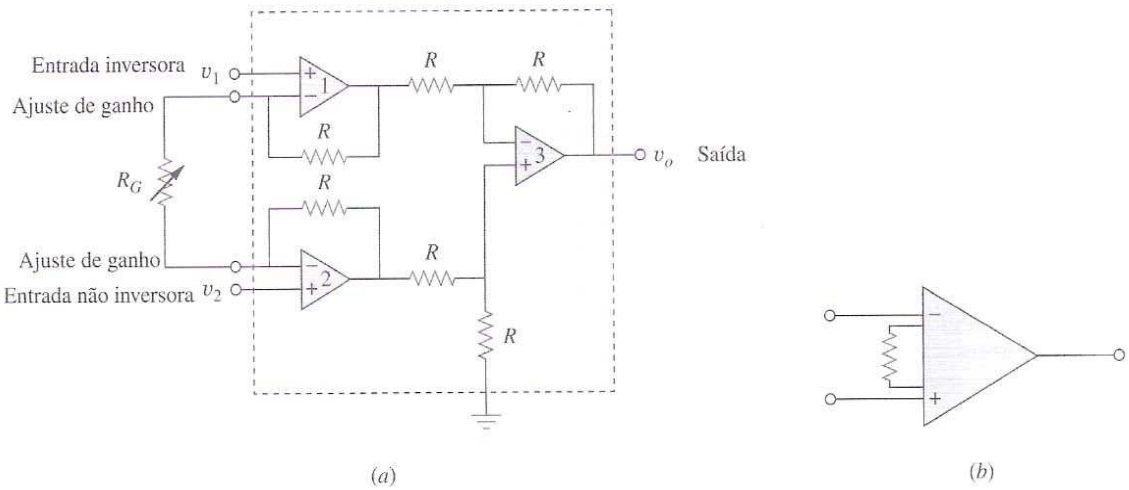
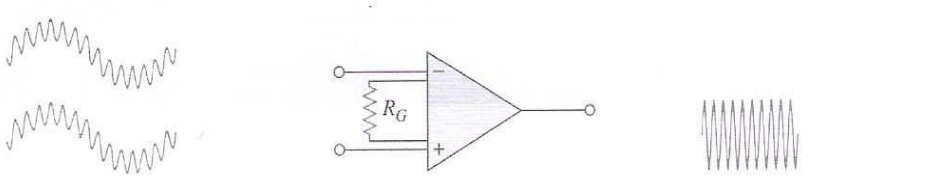


Figura 5.38 (*a*) Amplificador de instrumentação com uma resistência externa para ajustar o ganho; (*b*) diagrama esquemático.

onde o ganho de tensão é

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} \tag{5.25}$$

Conforme mostrado na Figura 5.39, o amplificador de instrumentação amplifica pequenas tensões de sinal diferencial sobrepostas a tensões de modo comum maiores. Uma vez que as tensões de modo comum são iguais, elas se cancelam.



Pequenos sinais diferenciais sobrepondo-se a sinais de modo comum maiores

Amplificador de instrumentação

Sinal diferencial amplificado, sem nenhum sinal de modo comum

Figura 5.39 O IA rejeita tensões comuns, mas amplifica pequenas tensões de sinal. Floyd, T. L. *Electronic Devices*. 4. ed., © 1995, p. 795. Reproduzido com a permissão da Pearson Education Inc., Upper Saddle River, NJ.

O IA apresenta três características principais:

1. O ganho de tensão é ajustado por *um* resistor externo R_G.
2. A impedância de entrada de ambas as entradas é muito alta e não varia à medida que o ganho é ajustado.
3. A saída v_o depende da diferença entre as entradas v_1 e v_2 e não da tensão comum a elas (tensão de modo comum).

Em virtude do largo emprego dos IAs, os fabricantes desenvolveram esses amplificadores em um único CI. Um exemplo típico é o LH0036, desenvolvido pela National Semiconductor. O ganho pode ser variado de 1 a 1.000 por meio de um resistor externo cujo valor pode variar entre 100 Ω e 10 kΩ.

EXEMPLO 5.13

Na Figura 5.38, considere que $R = 10$ kΩ, $v_1 = 2{,}011$ V e $v_2 = 2{,}017$ V. Se R_G for ajustado para 500 Ω, determine: (a) o ganho de tensão; (b) a tensão de saída v_o.

Solução:

(a) O ganho de tensão é

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} = 1 + \frac{2 \times 10.000}{500} = 41$$

(b) A tensão de saída é

$$v_o = A_v(v_2 - v_1) = 41(2{,}017 - 2{,}011) = 41(6)\text{ mV} = 246\text{ mV}$$

PROBLEMA PRÁTICO 5.13

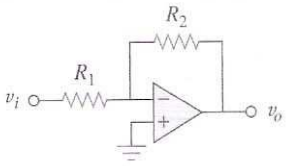
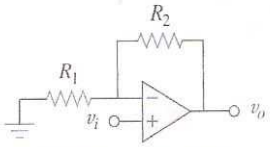
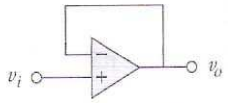
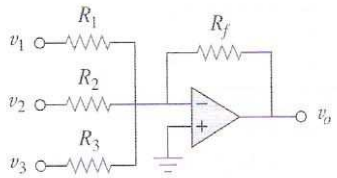
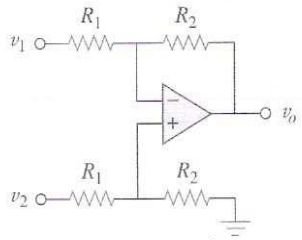
Determine o valor do resistor externo de ajuste de ganho necessário para o IA da Figura 5.38 produzir um ganho igual a 142 quando $R = 25$ kΩ.

Resposta: 354,6 Ω.

5.11 Resumo

1. O AOP é um amplificador de ganho elevado que possui alta resistência de entrada e baixa resistência de saída.
2. A Tabela 5.3 sintetiza os circuitos com amplificadores operacionais vistos neste capítulo. A expressão para o ganho de cada circuito amplificador é válida independentemente de as entradas serem CC, CA ou variáveis no tempo em geral.

Tabela 5.3 • Síntese dos circuitos básicos com amplificadores operacionais.

Circuito com AOP	Nome/relação entrada/saída
	Amplificador inversor $v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$
	Amplificador não inversor $v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_i$
	Seguidor de tensão $v_o = v_i$
	Somador $v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3\right)$
	Amplificador diferencial $v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$

3. Um AOP ideal tem resistência de entrada infinita, resistência de saída nula e ganho infinito.
4. Para um AOP ideal, a corrente em cada um dos dois terminais de entrada é zero, e a tensão entre seus terminais de entrada é insignificante.
5. Em um amplificador inversor, a tensão de saída é um múltiplo negativo da entrada.
6. Em um amplificador não inversor, a saída é um múltiplo positivo da entrada.
7. Em um seguidor de tensão, a saída segue a entrada.
8. Em um amplificador somador, a saída é a soma ponderada das entradas.
9. Em um amplificador diferencial, a saída é proporcional à diferença das duas entradas.

10. Os circuitos com amplificadores operacionais podem ser colocados em cascata sem alterar as relações entrada/saída.
11. O *PSpice* pode ser usado para analisar um circuito com amplificadores operacionais.
12. Entre as aplicações típicas do AOP considerado neste capítulo, temos o conversor digital-analógico e o amplificador de instrumentação.

Questões para revisão

5.1 Os dois terminais de entrada de um AOP são identificados como:

(a) alto e baixo
(b) positivo e negativo
(c) inversor e não inversor
(d) diferencial e não diferencial

5.2 Para um AOP ideal, quais das seguintes afirmações não são verdadeiras?

(a) tensão diferencial entre os terminais de entrada é zero
(b) corrente nos terminais de entrada é zero
(c) corrente contínua do terminal de saída é zero
(d) resistência de entrada é zero
(e) resistência de saída é zero

5.3 Para o circuito da Figura 5.40, a tensão v_o é:

(a) −6 V (b) −5 V
(c) −1,2 V (d) −0,2 V

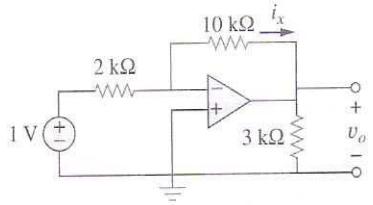


Figura 5.40 Esquema para as Questões para revisão 5.3 e 5.4.

5.4 Para o circuito da Figura 5.40, a corrente i_x é:

(a) 0,6 mA (b) 0,5 mA
(c) 0,2 mA (d) 1/12 mA

5.5 Se $v_s = 0$ no circuito da Figura 5.41, a corrente i_o é:

(a) −10 mA (b) −2,5 mA
(c) 10/12 mA (d) 10/14 mA

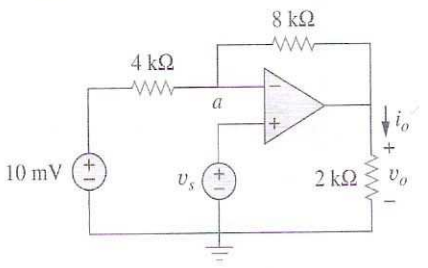


Figura 5.41 Esquema para Questões para revisão 5.5 e 5.7.

5.6 Se $v_s = 8$ mV no circuito da Figura 5.41, a tensão de saída é:

(a) −44 mV
(b) −8 mV
(c) 4 mV
(d) 7 mV

5.7 Consulte a Figura 5.41. Se $v_s = 8$ mV, a tensão v_a é:

(a) −8 mV (b) 0 mV
(c) 10/3 mV (d) 8 mV

5.8 A potência absorvida pelo resistor de 4 kΩ na Figura 5.42 é:

(a) 9 mW (b) 4 mW
(c) 2 mW (d) 1 mW

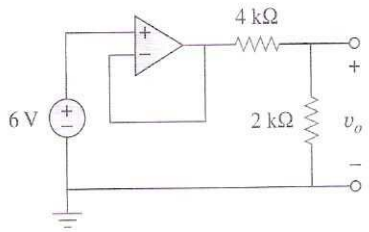


Figura 5.42 Esquema para a Questão para revisão 5.8.

5.9 Qual desses amplificadores é usado em um conversor digital-analógico?

(a) não inversor
(b) seguidor de tensão
(c) somador
(d) amplificador diferencial

5.10 Os amplificadores diferenciais são usados em:

(a) amplificadores de instrumentação
(b) seguidores de tensão
(c) reguladores de tensão
(d) *buffers*
(e) amplificadores somadores
(f) amplificadores subtratores

Respostas: 5.1c, 5.2c,d, 5.3b, 5.4b, 5.5a, 5.6c, 5.7d, 5.8b, 5.9c, 5.10a, f.

Problemas

Seção 5.2 Amplificadores operacionais

5.1 O modelo equivalente de certo AOP é mostrado na Figura 5.43. Determine:

(a) Resistência de entrada.

(b) Resistência de saída.

(c) Ganho de tensão em dB.

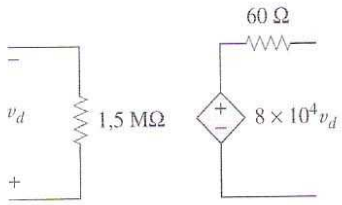


Figura 5.43 Esquema para o Problema 5.1.

5.2 O ganho de circuito aberto de um AOP é 100.000. Calcule a tensão de saída quando existem entradas de +10 μV no terminal inversor e +20 μV no terminal não inversor.

5.3 Determine a tensão de saída quando é aplicado –20 μV ao terminal inversor de um AOP e +30 μV ao seu terminal não inversor. Suponha que o AOP tenha um ganho de circuito aberto igual a 200.000.

5.4 A tensão de saída de um AOP é –4 V quando a entrada não inversora é 1 mV. Se o ganho de circuito aberto do AOP for de 2×10^6, qual é a entrada inversora?

5.5 Para o circuito com AOP da Figura 5.44, o AOP tem um ganho em malha aberta igual a 100.000, uma resistência de entrada igual a 10 kΩ e uma resistência de saída igual a 100 Ω. Determine o ganho de tensão v_o/v_i usando o modelo não ideal do AOP.

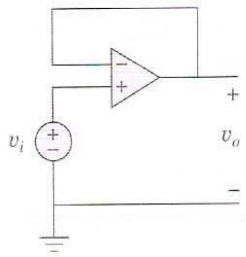


Figura 5.44 Esquema para o Problema 5.5.

5.6 Usando os mesmos parâmetros do AOP 741 do Exemplo 5.1, determine v_o no circuito com AOP da Figura 5.45.

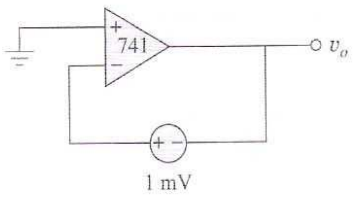


Figura 5.45 Esquema para o Problema 5.6.

5.7 O AOP da Figura 5.46 tem $R_i = 100$ kΩ, $R_o = 100$ Ω, $A = 100.000$. Determine a tensão diferencial v_d e a tensão de saída v_o.

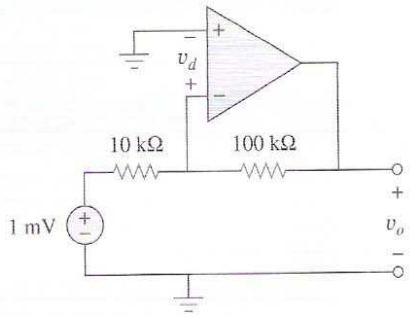


Figura 5.46 Esquema para o Problema 5.7.

Seção 5.3 Amplificador operacional ideal

5.8 Calcule v_o para o circuito com AOP da Figura 5.47.

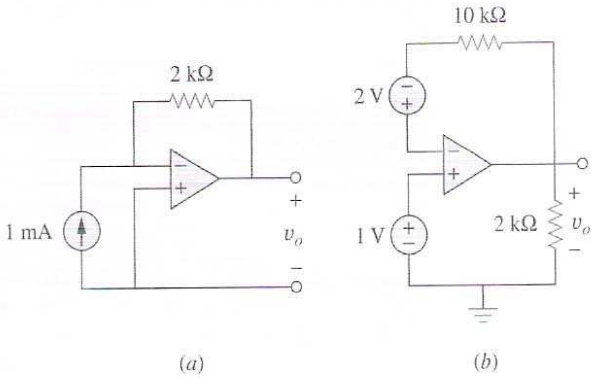


Figura 5.47 Esquema para o Problema 5.8.

5.9 Determine v_o para cada um dos circuitos com AOP da Figura 5.48.

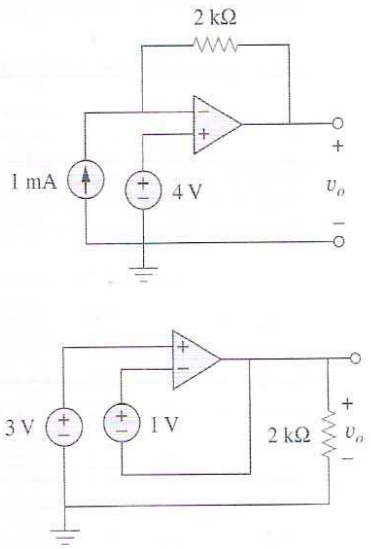


Figura 5.48 Esquema para o Problema 5.9.

5.10 Determine o ganho v_o/v_s do circuito na Figura 5.49.

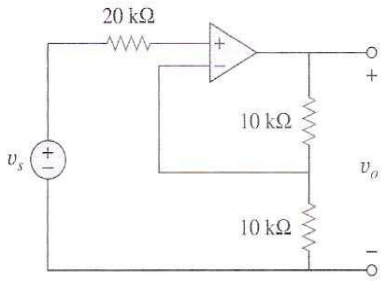


Figura 5.49 Esquema para o Problema 5.10.

5.11 Usando a Figura 5.50, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entender melhor como funciona um amplificador operacional (AOP).

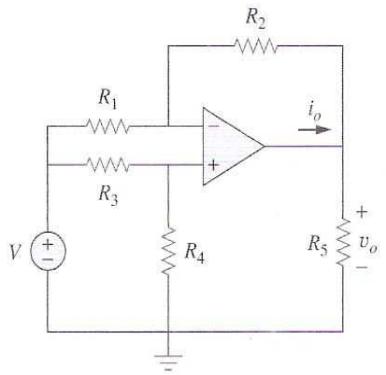


Figura 5.50 Esquema para o Problema 5.11.

5.12 Calcule a relação de tensão v_o/v_s para o circuito com AOP da Figura 5.51. Suponha que o AOP é ideal.

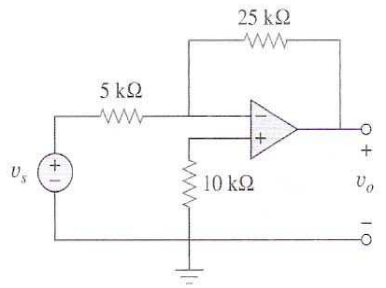


Figura 5.51 Esquema para o Problema 5.12.

5.13 Determine v_o e i_o no circuito da Figura 5.52.

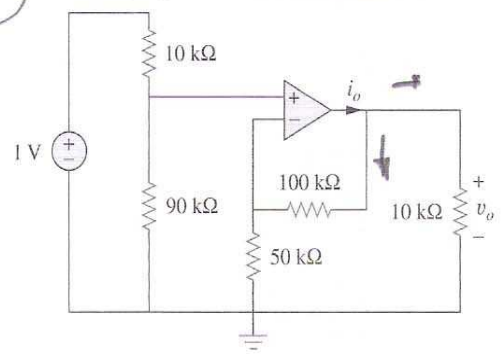


Figura 5.52 Esquema para o Problema 5.13.

5.14 Determine a tensão de saída v_o no circuito da Figura 5.53.

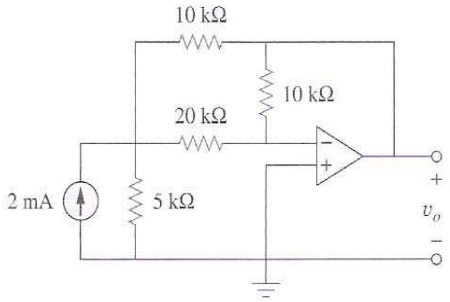


Figura 5.53 Esquema para o Problema 5.14.

• Seção 5.4 Amplificador inversor

5.15 (a) Determine a razão v_o/i_s no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.54.

(b) Avalie a razão para $R_1 = 20$ kΩ, $R_2 = 25$ kΩ, $R_3 = 40$ kΩ.

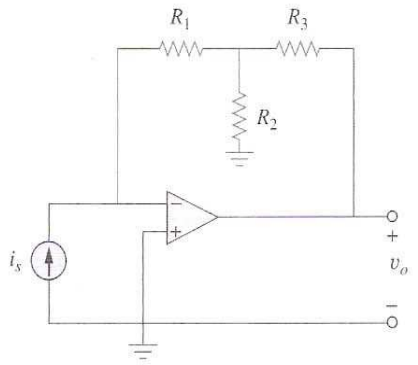


Figura 5.54 Esquema para o Problema 5.15.

5.16 Usando a Figura 5.55, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem como funciona um AOP na configuração inversor.

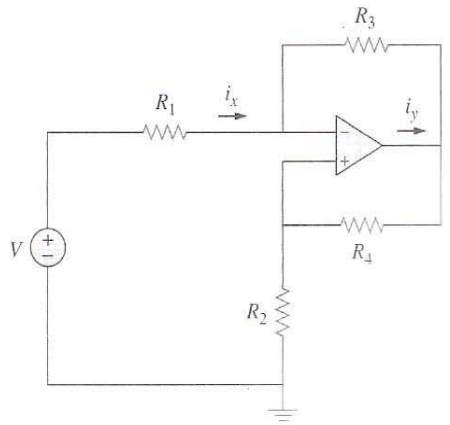


Figura 5.55 Esquema para o Problema 5.16.

5.17 Calcule o ganho v_o/v_i quando a chave na Figura 5.56 se encontra na:

(a) Posição 1.

(b) Posição 2.

(c) Posição 3.

*

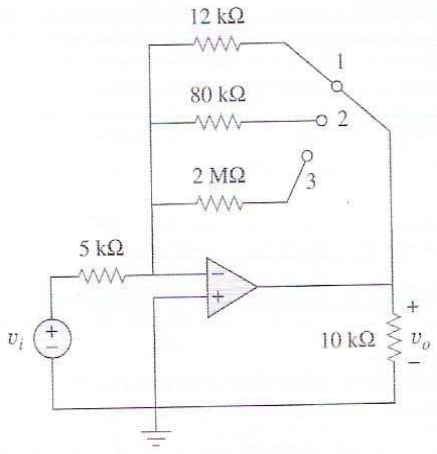


Figura 5.56 Esquema para o Problema 5.17.

* **5.18** Para o circuito da Figura 5.57, determine o equivalente de Thévenin visto pelos terminais *a*-*b*.

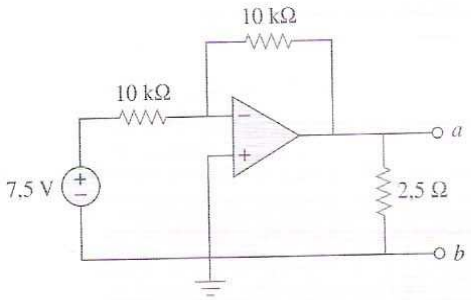


Figura 5.57 Esquema para o Problema 5.18.

5.19 Determine i_o no circuito da Figura 5.58.

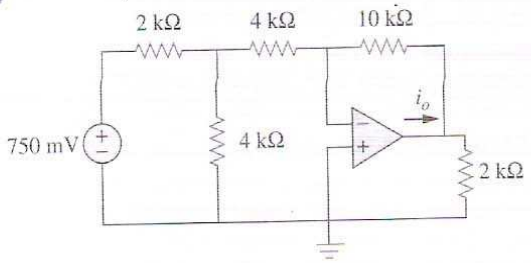


Figura 5.58 Esquema para o Problema 5.19.

* **5.20** No circuito da Figura 5.59, calcule v_o sendo que $v_s = 2$ V.

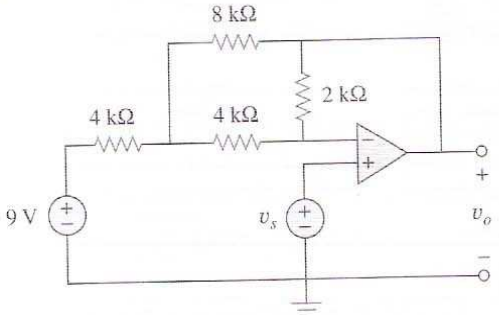


Figura 5.59 Esquema para o Problema 5.20.

* O asterisco indica um problema que constitui um desafio.

5.21 Calcule v_o no circuito com AOP da Figura 5.60.

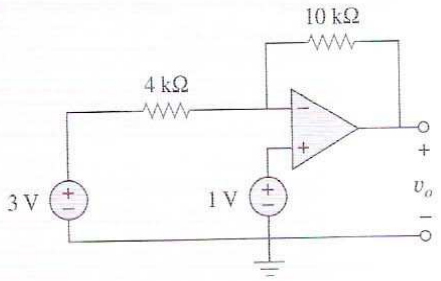


Figura 5.60 Esquema para o Problema 5.21.

5.22 Projete um amplificador inversor com ganho –15.

5.23 Para o circuito com AOP da Figura 5.61, determine o ganho de tensão v_o/v_s.

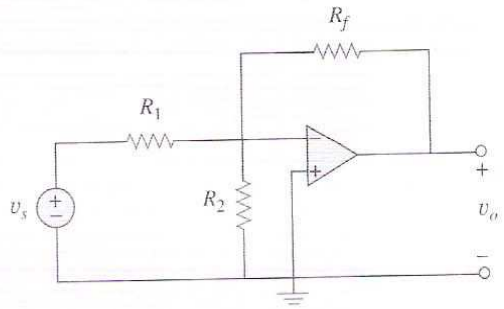


Figura 5.61 Esquema para o Problema 5.23.

5.24 No circuito mostrado na Figura 5.62, determine k na função de transferência de tensão $v_o = kv_s$.

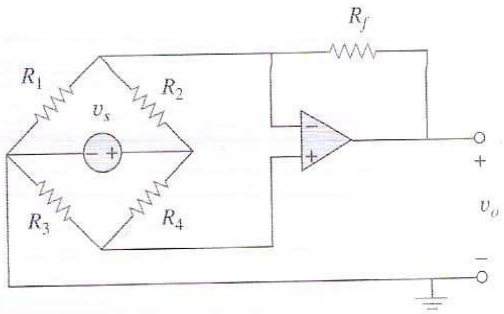


Figura 5.62 Esquema para o Problema 5.24.

Seção 5.5 Amplificador não inversor

5.25 Calcule v_o no circuito elétrico com AOP da Figura 5.63.

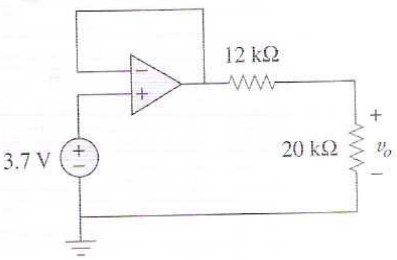


Figura 5.63 Esquema para o Problema 5.25.

5.26 Usando a Figura 5.64, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor um AOP na configuração não inversor.

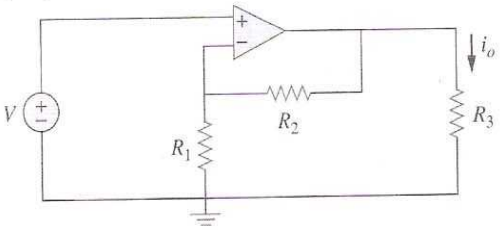


Figura 5.64 Esquema para o Problema 5.26.

5.27 Determine v_o no circuito com AOP da Figura 5.65.

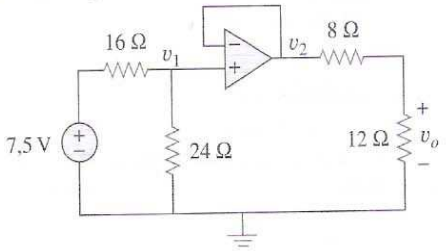


Figura 5.65 Esquema para o Problema 5.27.

5.28 Determine i_o no circuito com AOP da Figura 5.66.

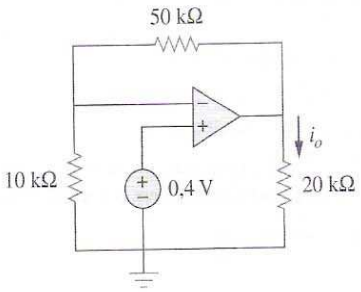


Figura 5.66 Esquema para o Problema 5.28.

5.29 Determine o ganho de tensão v_o/v_i do circuito com AOP da Figura 5.67.

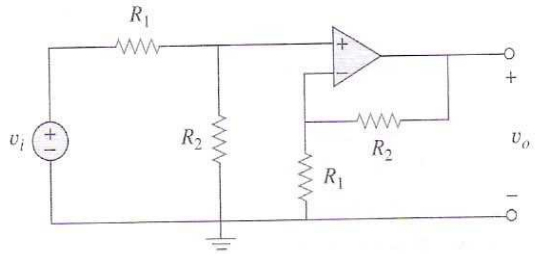


Figura 5.67 Esquema para o Problema 5.29.

5.30 No circuito mostrado na Figura 5.68, determine i_x e a potência absorvida pelo resistor de 20 kΩ.

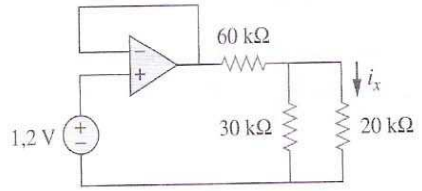


Figura 5.68 Esquema para o Problema 5.30.

5.31 Para o circuito da Figura 5.69, determine i_x.

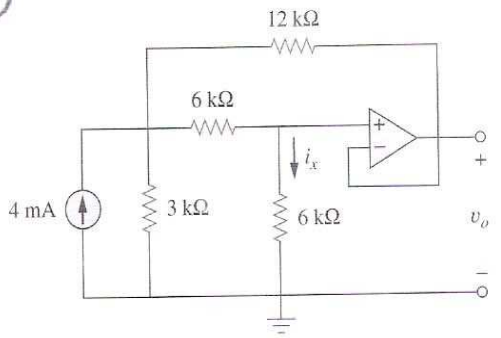


Figura 5.69 Esquema para o Problema 5.31.

5.32 Calcule i_x e v_o no circuito da Figura 5.70. Determine a potência dissipada pelo resistor de 60 kΩ.

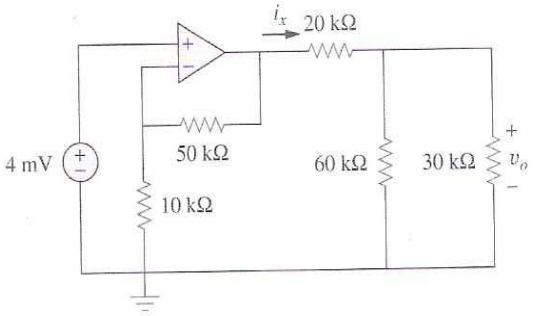


Figura 5.70 Esquema para o Problema 5.32.

5.33 Observe o circuito com AOP da Figura 5.71. Calcule i_x e a potência dissipada pelo resistor de 3 kΩ.

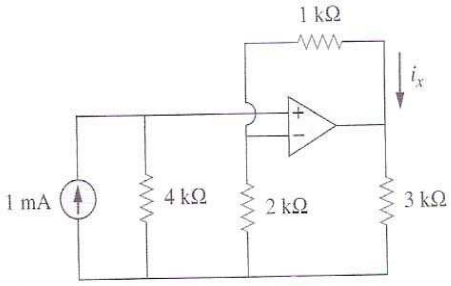


Figura 5.71 Esquema para o Problema 5.33.

5.34 Dado o circuito com AOP mostrado na Figura 5.72, expresse v_o em termos de v_1 e v_2.

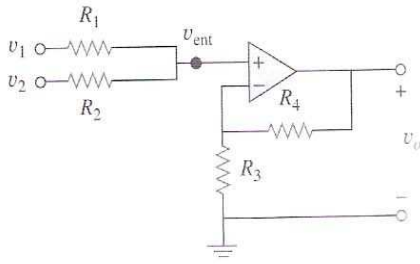


Figura 5.72 Esquema para o Problema 5.34.

5.35 Projete um amplificador não inversor de ganho 7,5.

5.36 Para o circuito mostrado na Figura 5.73, determine o equivalente de Thévenin nos terminais *a-b*. (Sugestão: Para determinar R_{Th}, aplique uma fonte de corrente i_o e calcule v_o.)

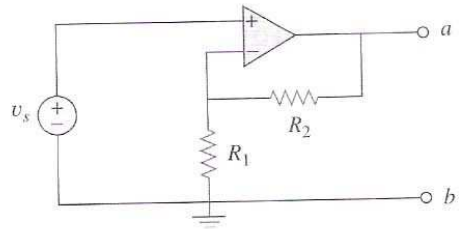


Figura 5.73 Esquema para o Problema 5.36.

Seção 5.6 Amplificador somador

5.37 Determine a saída do amplificador somador da Figura 5.74.

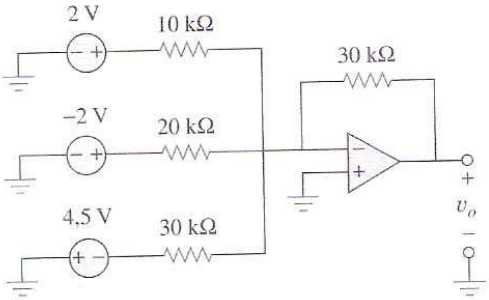


Figura 5.74 Esquema para o Problema 5.37.

5.38 Usando a Figura 5.75, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor os amplificadores somadores.

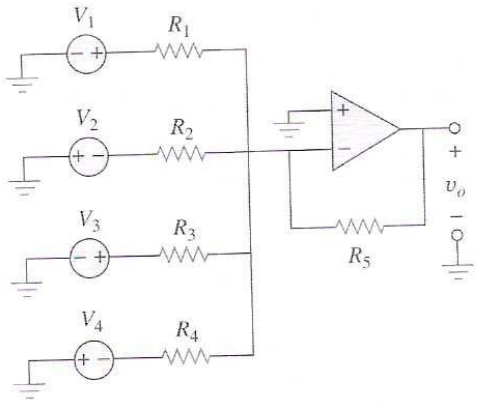


Figura 5.75 Esquema para o Problema 5.38.

5.39 Para o circuito com AOP da Figura 5.76, determine o valor de v_2 de modo que $v_o = -16{,}5$ V.

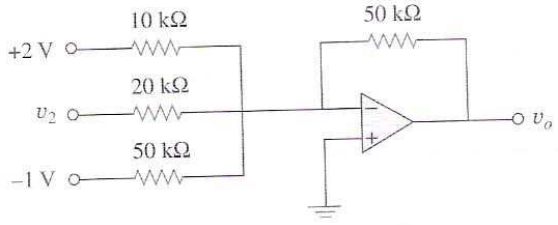


Figura 5.76 Esquema para o Problema 5.39.

5.40 Consultando o circuito mostrado na Figura 5.77, determine V_o em termos de V_1 e V_2 no circuito da Figura 5.77.

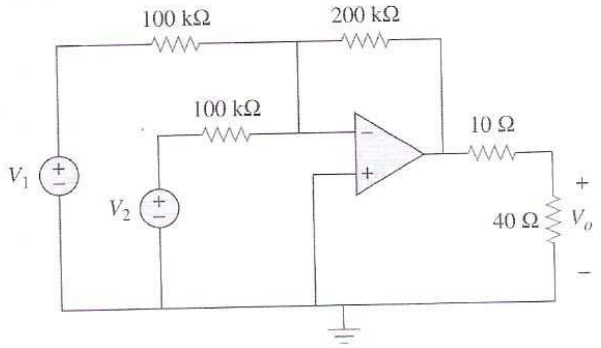


Figura 5.77 Esquema para o Problema 5.40.

5.41 Um *amplificador de média* é um somador que fornece uma saída igual à média das entradas. Utilizando valores de resistor de realimentação e de entrada apropriados, pode-se obter

$$-v_{sai} = \tfrac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

Usando um resistor de realimentação de 10 kΩ, projete um amplificador de média com quatro entradas.

5.42 Um amplificador somador de três entradas possui resistores de entrada $R_1 = R_2 = R_3 = 75$ kΩ. Para produzir um amplificador de média, que valor de resistor de realimentação é necessário?

5.43 Um amplificador somador de quatro entradas possui $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 80$ kΩ. Que valor de resistor de realimentação é necessário para transformá-lo em um amplificador de média?

5.44 Demonstre que a tensão de saída v_o do circuito da Figura 5.78 é

$$v_o = \frac{(R_3 + R_4)}{R_3(R_1 + R_2)}(R_2 v_1 + R_1 v_2)$$

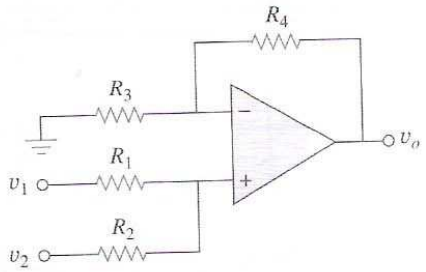


Figura 5.78 Esquema para o Problema 5.44.

5.45 Projete um circuito com AOP para realizar a seguinte operação:

$$v_o = 3v_1 - 2v_2$$

Todas as resistências devem ser ≤ 100 kΩ.

5.46 Usando apenas dois amplificadores operacionais, desenhe um circuito para calcular

$$-v_{sai} = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_3}{2}$$

• Seção 5.7 Amplificador diferencial

5.47 O circuito da Figura 5.79 é para um amplificador diferencial. Determine v_o, dado que $v_1 = 1$ V e $v_2 = 2$ V.

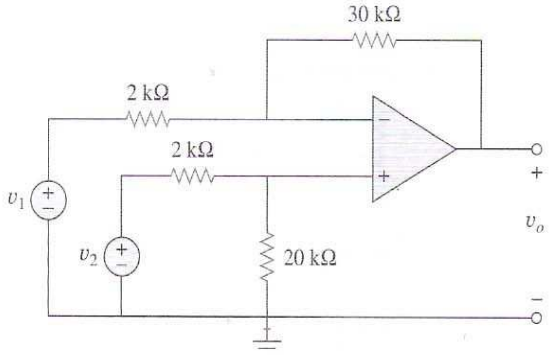


Figura 5.79 Esquema para o Problema 5.47.

5.48 O circuito da Figura 5.80 é um amplificador diferencial acionado por uma ponte. Determine v_o.

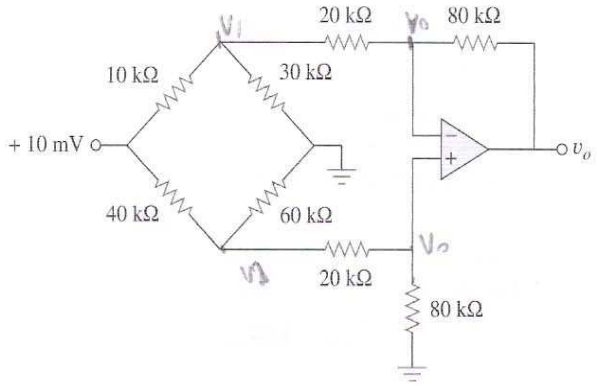


Figura 5.80 Esquema para o Problema 5.48.

5.49 Projete um amplificador diferencial para ter um ganho igual a 4 e uma resistência de entrada de modo comum de 20 kΩ em cada entrada.

5.50 Projete um circuito para amplificar a diferença entre duas entradas por 2,5.

(a) Use apenas um AOP.

(b) Use dois AOPs.

5.51 Usando dois amplificadores operacionais, projete um subtrator.

* **5.52** Projete um circuito com amplificadores operacionais tal que

$$v_o = 4v_1 + 6v_2 - 3v_3 - 5v_4$$

Faça todos os resistores permanecerem na faixa dos 20 kΩ a 200 kΩ.

* **5.53** O amplificador diferencial comum para operação com ganho fixo é mostrado na Figura 5.81*a*. Ele é simples e confiável, a menos que o ganho seja variável. Uma maneira de fornecer ajuste de ganho sem perder a simplicidade e precisão é usar o circuito da Figura 5.81*b*. Outra maneira é usar o circuito da Figura 5.81*c*.

Demonstre que:

(a) Para o circuito da Figura 5.81*a*,

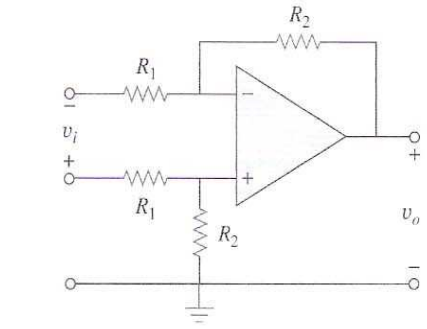
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1}$$

(b) Para o circuito da Figura 5.81*b*,

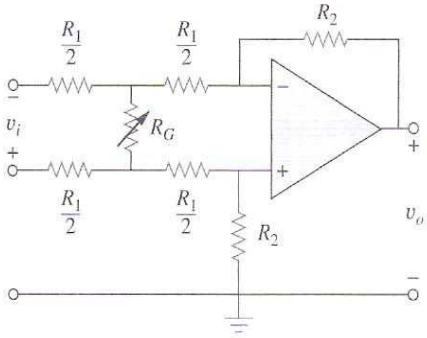
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{2R_G}}$$

(c) Para o circuito da Figura 5.81*c*,

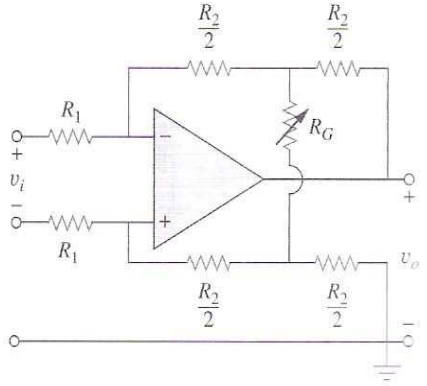
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{2R_G}\right)$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 5.81 Esquema para o Problema 5.53.

Seção 5.8 Circuitos com amplificadores operacionais em cascata

5.54 Determine a relação de transferência de tensão v_o/v_s no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.82, onde $R = 10\ \text{k}\Omega$.

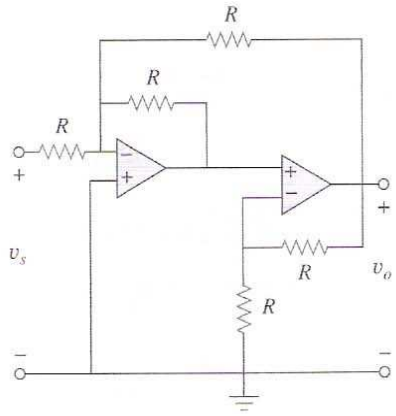


Figura 5.82 Esquema para o Problema 5.54.

5.55 Em certo dispositivo eletrônico, deseja-se um amplificador de três estágios cujo ganho de tensão geral é 42 dB. Os ganhos de tensão individuais dos dois primeiros estágios devem ser iguais, enquanto o ganho do terceiro deve ser de um quarto de cada um dos dois primeiros. Calcule o ganho de tensão de cada um deles.

5.56 Usando a Figura 5.83, elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor AOPs em cascata.

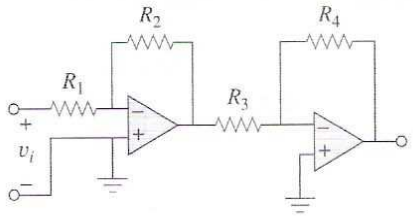


Figura 5.83 Esquema para o Problema 5.56.

5.57 Determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.84.

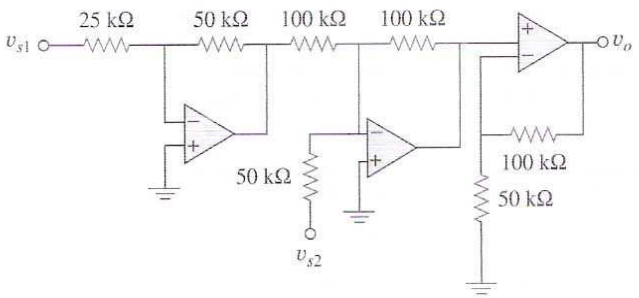


Figura 5.84 Esquema para o Problema 5.57.

5.58 Calcule i_o no circuito com amplificadores operacionais da *Figura 5.85*.

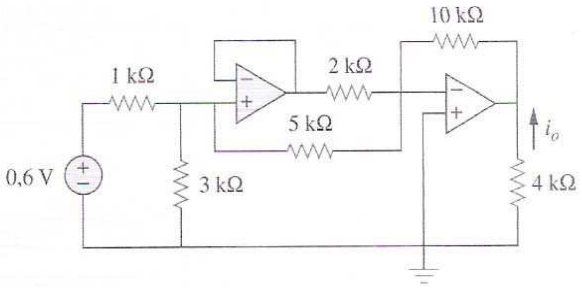


Figura 5.85 Esquema para o Problema 5.58.

5.59 No circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.86, determine o ganho de tensão v_o/v_s. Considere $R = 10\ \text{k}\Omega$.

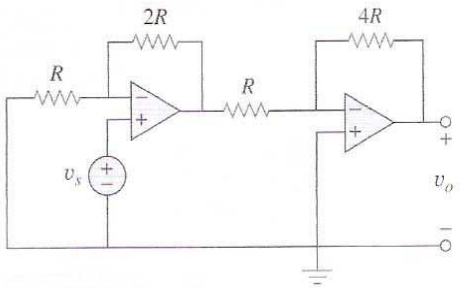


Figura 5.86 Esquema para o Problema 5.59.

5.60 Calcule v_o/v_i no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.87.

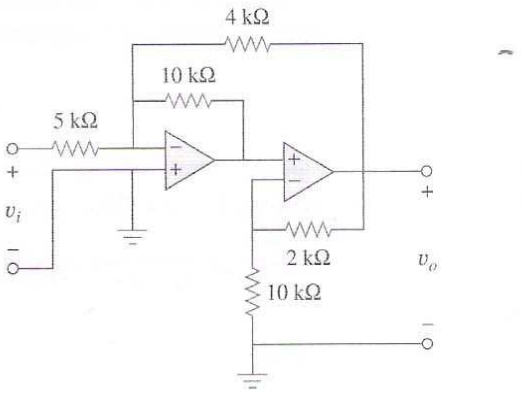


Figura 5.87 Esquema para o Problema 5.60.

5.61 Determine v_o no circuito da Figura 5.88.

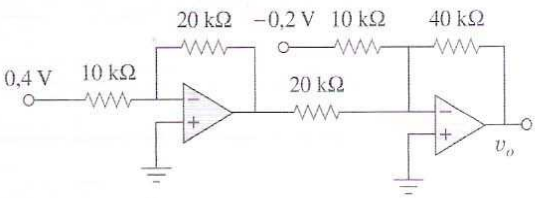


Figura 5.88 Esquema para o Problema 5.61.

5.62 Obtenha o ganho de tensão de circuito fechado v_o/v_i do circuito da Figura 5.89.

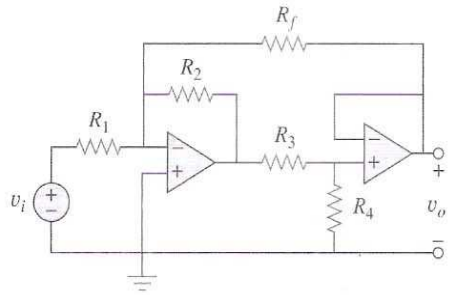


Figura 5.89 Esquema para o Problema 5.62.

5.63 Determine o ganho v_o/v_i do circuito na Figura 5.90.

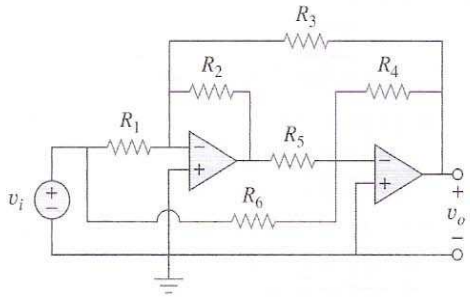


Figura 5.90 Esquema para o Problema 5.63.

5.64 Para o circuito com amplificadores operacionais mostrado na Figura 5.91, determine v_o/v_i.

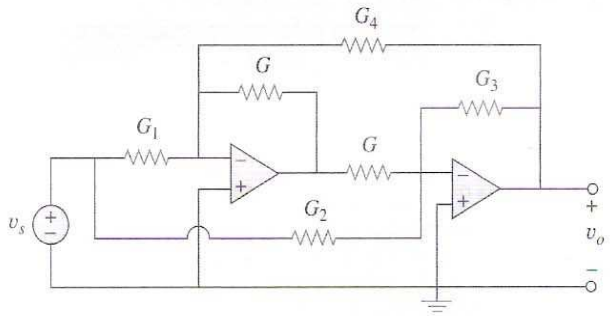


Figura 5.91 Esquema para o Problema 5.64.

5.65 Determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.92.

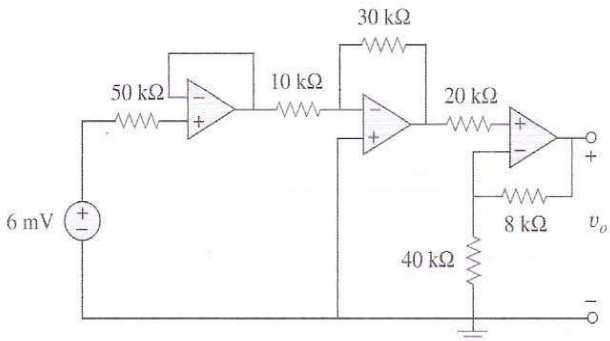


Figura 5.92 Esquema para o Problema 5.65.

5.66 Para o circuito da Figura 5.93, determine v_o.

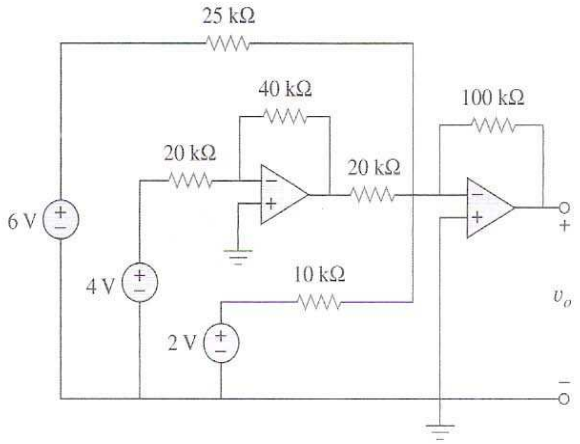


Figura 5.93 Esquema para o Problema 5.66.

5.67 Obtenha a saída v_o no circuito da Figura 5.94.

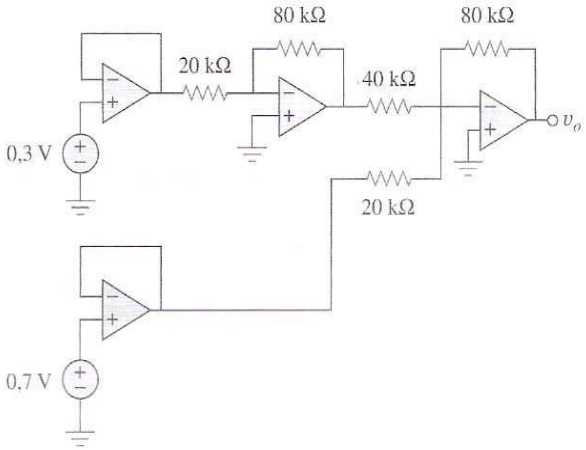


Figura 5.94 Esquema para o Problema 5.67.

5.68 Determine v_o no circuito da Figura 5.95, supondo que $R_f = \infty$ (circuito aberto).

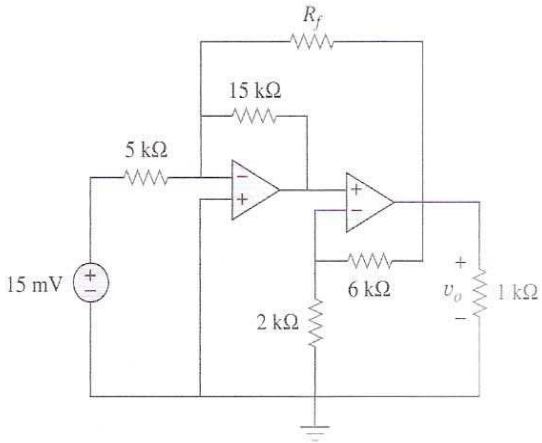


Figura 5.95 Esquema para os Problemas 5.68 e 5.69.

5.69 Repita o problema anterior se $R_f = 10$ kΩ.

5.70 Determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.96.

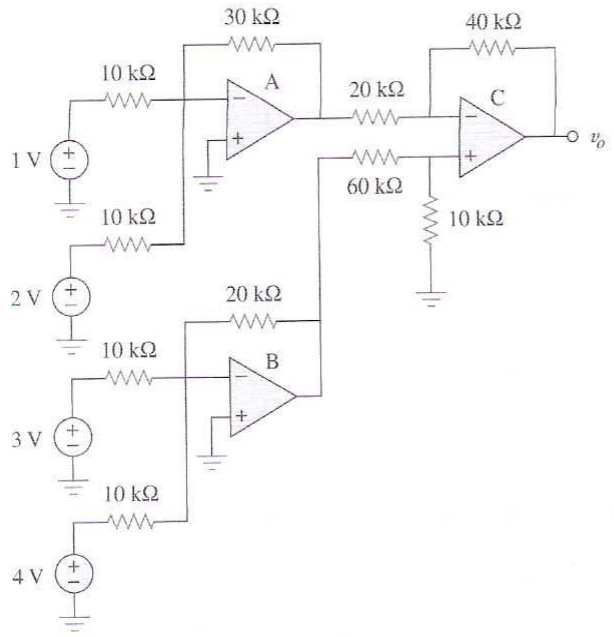


Figura 5.96 Esquema para o Problema 5.70.

5.71 Determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.97.

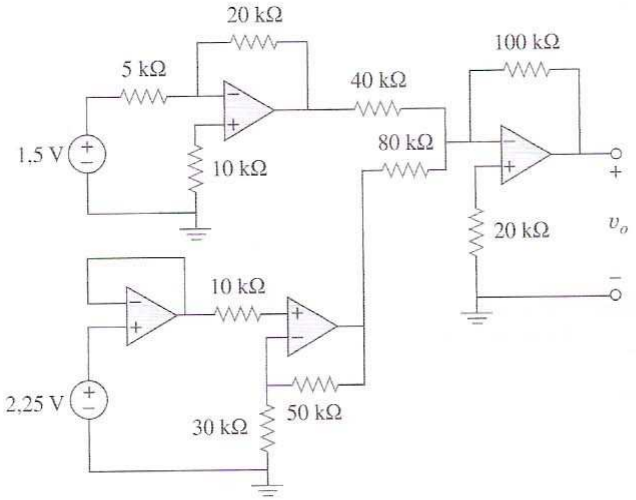


Figura 5.97 Esquema para o Problema 5.71.

5.72 Determine a tensão de carga v_L no circuito da Figura 5.98.

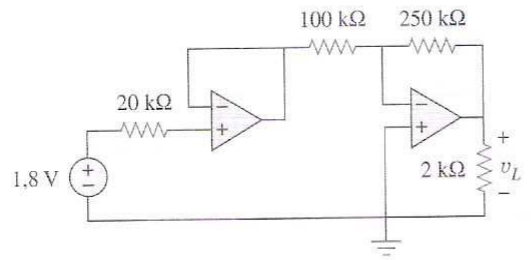


Figura 5.98 Esquema para o Problema 5.72.

5.73 Determine a tensão de carga v_L no circuito da Figura 5.99.

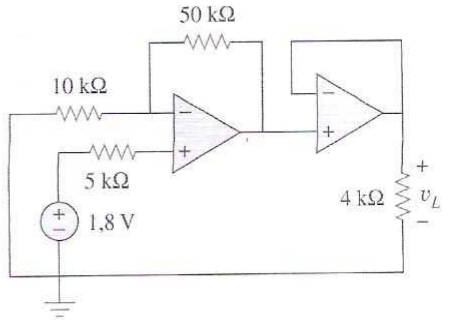


Figura 5.99 Esquema para o Problema 5.73.

5.74 Determine i_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.100.

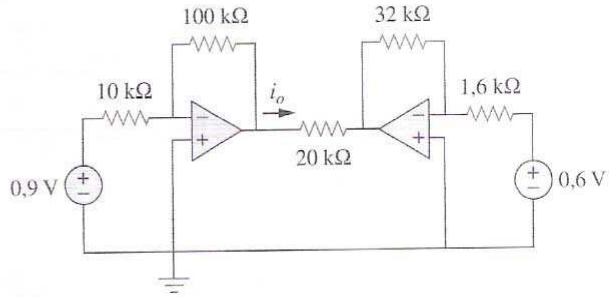


Figura 5.100 Esquema para o Problema 5.74.

Seção 5.9 Análise de circuitos com amplificadores operacionais usando o *PSpice*

5.75 Refaça o Exemplo 5.11, usando o AOP real LM324 em vez do uA741.

5.76 Resolva o Problema 5.19, usando o *PSpice* ou *MultiSim* e o AOP uA741.

5.77 Resolva o Problema 5.48, usando o *PSpice* ou *MultiSim* e o AOP LM324.

5.78 Utilize o *PSpice* ou *MultiSim* para obter v_o no circuito da Figura 5.101.

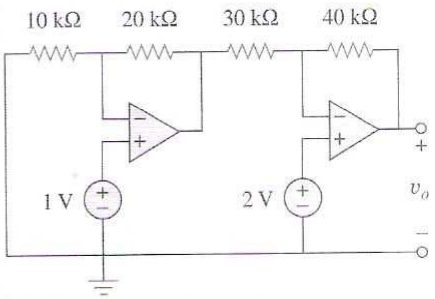


Figura 5.101 Esquema para o Problema 5.78.

5.79 Determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.102, usando o *PSpice* ou *MultiSim*.

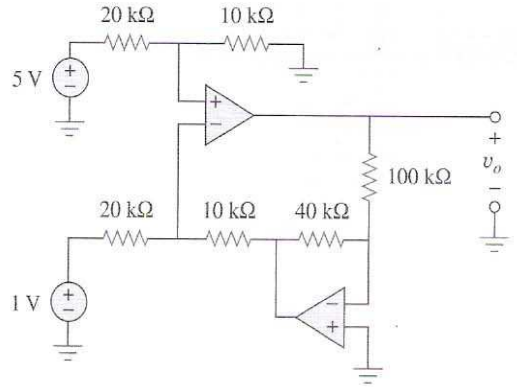


Figura 5.102 Esquema para o Problema 5.79.

5.80 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para resolver o Problema 5.70.

5.81 Use o *PSpice* ou *MultiSim* para verificar os resultados no Exemplo 5.9. Considere amplificadores operacionais reais LM324.

• Seção 5.10 Aplicações

5.82 Um DAC de cinco bits cobre um intervalo de tensão de 0 V a 7,75 V. Calcule quanto vale cada bit em termos de tensão.

5.83 Projete um conversor digital-analógico de seis bits.

(a) Se quisermos $|V_o| = 1{,}1875$ V, quanto deveria ser $[V_1V_2V_3V_4V_5V_6]$?

(b) Calcule $|V_o|$ se $[V_1V_2V_3V_4V_5V_6] = [011011]$.

(c) Qual o valor máximo que $|V_o|$ pode assumir?

***5.84** Um DAC *escada R-2R* de quatro bits é apresentado na Figura 5.103.

(a) Demonstre que a tensão de saída é dada por

$$-V_o = R_f\left(\frac{V_1}{2R} + \frac{V_2}{4R} + \frac{V_3}{8R} + \frac{V_4}{16R}\right)$$

(b) Se $R_f = 12$ kΩ e $R = 10$ kΩ, determine $|V_o|$ para $[V_1V_2V_3V_4] = [1011]$ e $[V_1V_2V_3V_4] = [0101]$.

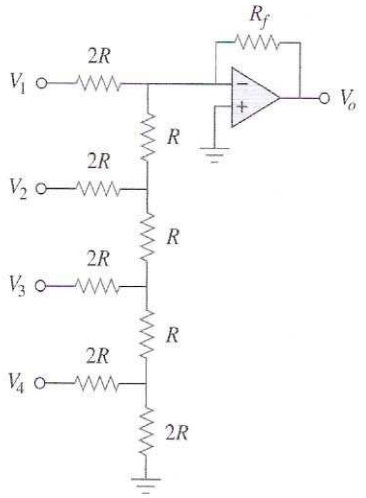


Figura 5.103 Esquema para o Problema 5.84.

5.85 No circuito com amplificadores operacionais da Figura 5.104, determine o valor de R de modo que a potência absorvida pelo resistor de 10 kΩ seja 10 mW. Considere $v_s = 2$ V.

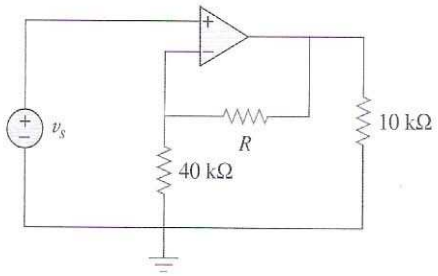


Figura 5.104 Esquema para o Problema 5.85.

5.86 Projete uma fonte de corrente ideal controlada por tensão (dentro dos limites de operação do AOP) onde a corrente de saída é igual a 200 $v_s(t)$ μA.

5.87 A Figura 5.105 mostra um amplificador de instrumentação com dois amplificadores operacionais. Deduza uma expressão para v_o em termos de v_1 e v_2. Como esse amplificador pode ser usado como um subtrator?

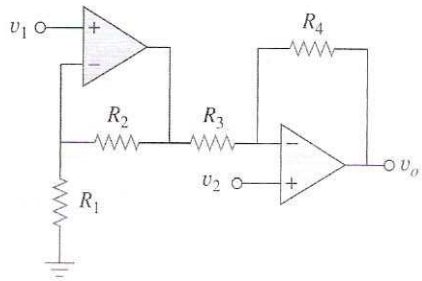


Figura 5.105 Esquema para o Problema 5.87.

***5.88** A Figura 5.106 mostra um amplificador para instrumentação comandado por um circuito em ponte. Calcule o ganho do amplificador.

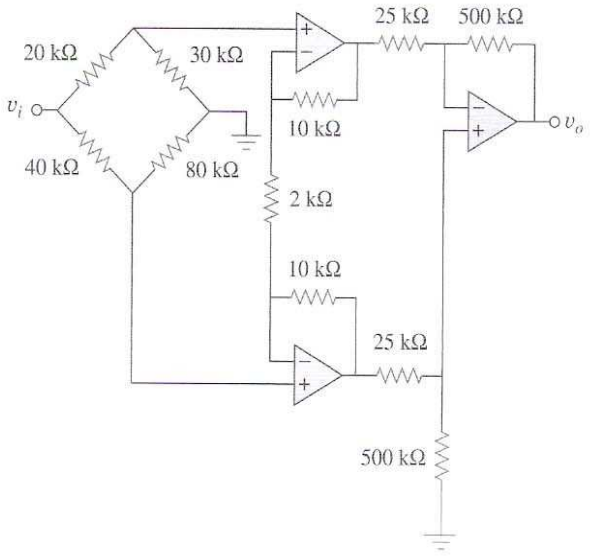


Figura 5.106 Esquema para o Problema 5.88.

Problemas abrangentes

5.89 Desenhe um circuito que forneça uma relação entre tensão de saída v_o e tensão de entrada v_s tal que $v_o = 12v_s - 10$. Estão disponíveis dois amplificadores operacionais, uma bateria de 6 V e vários resistores.

5.90 O circuito com AOP da Figura 5.107 é um *amplificador de corrente*. Determine o ganho de corrente i_o/i_s do amplificador.

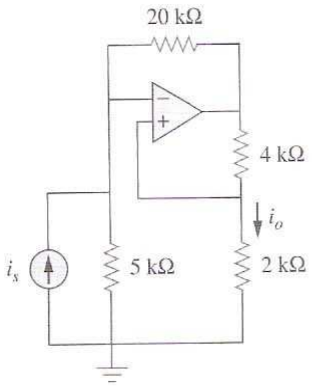


Figura 5.107 Esquema para o Problema 5.90.

5.91 Um amplificador de corrente não inversor é representado na Figura 5.108. Calcule o ganho i_o/i_s. Considere $R_1 = 8\ \text{k}\Omega$ e $R_2 = 1\ \text{k}\Omega$.

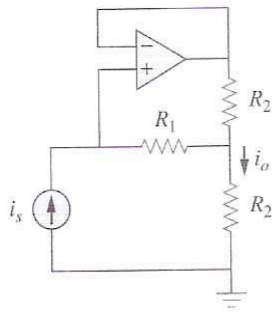


Figura 5.108 Esquema para o Problema 5.91.

5.92 Consulte o *amplificador em ponte* mostrado na Figura 5.109. Determine o ganho de tensão v_o/v_i.

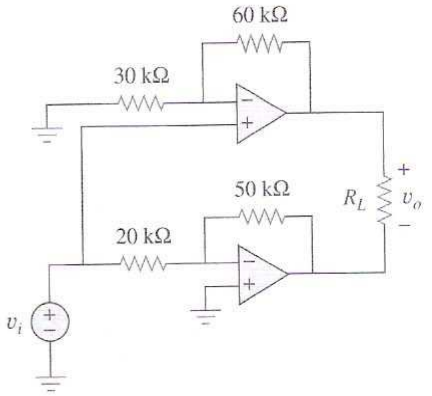


Figura 5.109 Esquema para o Problema 5.92.

*** 5.93** Um conversor tensão-corrente é mostrado na Figura 5.110, significando que $i_L = Av_i$ se $R_1R_2 = R_3R_4$. Descubra o termo constante A.

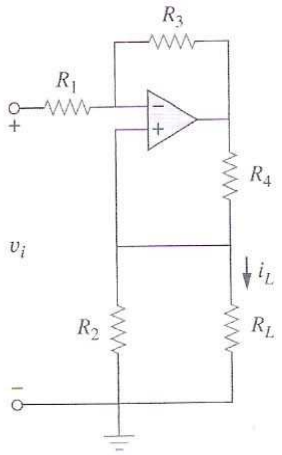


Figura 5.110 Esquema para o Problema 5.93.

6

CAPACITORES E INDUTORES

Na ciência, o crédito vai para o homem que convence o mundo, não para o que primeiro teve a ideia.

Francis Darwin

Progresso profissional

Critérios ABET EC 2000 (3.c), "habilidade em projetar um sistema, componente ou processo para atender às necessidades desejadas".

A "habilidade em projetar um sistema, componente ou processo para atender às necessidades desejadas" é a razão para os engenheiros serem contratados, e é por isso que esta é a capacidade *técnica* mais importante para esse profissional. É interessante notar que o sucesso como engenheiro é diretamente proporcional à capacidade de ele se comunicar, porém, sua habilidade com projetos vem em primeiro lugar.

O projeto acontece quando se tem o que é chamado problema aberto que, finalmente, é definido pela solução. Dentro do contexto deste livro, podemos explorar apenas alguns desses elementos e buscar atingir todas as etapas de nossa técnica de resolução de problemas, que lhe ensinará vários elementos essenciais do processo de projeto.

Provavelmente, a parte mais importante do projeto é definir, de forma clara, o que é o sistema, o componente, o processo ou, no nosso caso, o problema. É raro ser atribuída a um engenheiro uma tarefa perfeitamente clara. Consequentemente, como estudante de engenharia, você pode desenvolver e aperfeiçoar essa habilidade, fazendo, a si próprio, aos seus colegas ou aos professores, perguntas voltadas a esclarecer o enunciado do problema.

Explorar e avaliar soluções e alternativas é outra parte importante do processo de projeto, sendo que você pode praticar essa parte do processo de projeto em quase todos os problemas com que se deparará.

6.1 Introdução

Até então, limitamo-nos a estudar circuitos resistivos. Neste capítulo, introduziremos dois novos e importantes elementos de circuitos lineares passivos: o capacitor e o indutor. Diferentemente dos resistores, que dissipam energia, os capacitores e os indutores não dissipam, mas sim, armazenam energia que pode ser posteriormente recuperada. Por essa razão, os capacitores e os indutores são chamados elementos de *armazenamento*.

Contrastando com um resistor, que gasta ou dissipa energia de forma irreversível, um indutor ou um capacitor armazena ou libera energia (isto é, eles têm capacidade de memória).

A aplicação de circuitos resistivos é bastante limitada. Com a introdução dos capacitores e dos indutores, estaremos aptos a analisar os circuitos mais importantes e práticos. Esteja certo de que as técnicas de análise de circuitos, apresentadas nos Capítulos 3 e 4, são igualmente aplicáveis aos circuitos contendo capacitores e indutores.

A princípio, introduziremos os capacitores e descreveremos como associá-los em série ou em paralelo. Posteriormente, faremos o mesmo para os indutores. Como aplicações comuns, exploramos como os capacitores são associados com amplificadores operacionais para formarem integradores, diferenciadores e computadores analógicos.

6.2 Capacitores

Capacitor é um elemento passivo projetado para armazenar energia em seu campo elétrico. Além dos resistores, os capacitores são os componentes elétricos mais comuns, sendo largamente utilizados em eletrônica, comunicações, computadores e sistemas de potência, assim como, por exemplo, em circuitos de sintonia de receptores de rádio e como elementos de memória dinâmica em sistemas computadorizados.

Um capacitor é construído conforme representado na Figura 6.1.

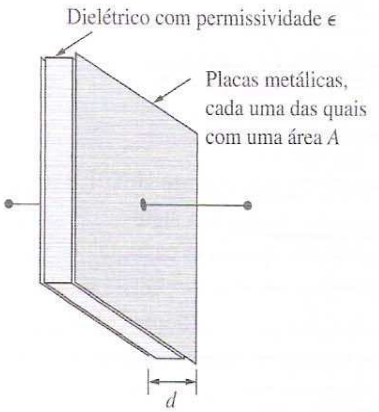


Figura 6.1 Capacitor comum.

Um capacitor é formado por duas placas condutoras separadas por um isolante (ou dielétrico).

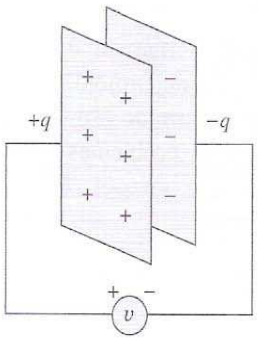


Figura 6.2 Capacitor com tensão aplicada v.

Em diversas aplicações práticas, as placas podem ser constituídas por folhas de alumínio, enquanto o dielétrico pode ser composto por ar, cerâmica, papel ou mica.

Quando uma fonte de tensão v é conectada ao capacitor, como na Figura 6.2, a fonte deposita uma carga positiva q sobre uma placa e uma carga negativa $-q$ na outra placa. Diz-se que o capacitor armazena a carga elétrica. A quantidade de carga armazenada, representada por q, é diretamente proporcional à tensão aplicada v de modo que

$$q = Cv \tag{6.1}$$

De forma alternativa, capacitância é a quantidade de carga armazenada por placa para uma unidade de diferença de potencial em um capacitor.

onde C, a constante de proporcionalidade, é conhecida como a *capacitância* do capacitor, e sua unidade é o farad (F), em homenagem ao físico inglês Michael Faraday (1791-1867). Da Equação (6.1), podemos deduzir a seguinte definição:

Capacitância é a razão entre a carga depositada em uma placa de um capacitor e a diferença de potencial entre as duas placas, medidas em farads (F).

PERFIS HISTÓRICOS

Michael Faraday (1791-1867), químico e físico inglês, provavelmente foi o maior experimentalista que existiu.

Nascido próximo a Londres, Faraday realizou seu sonho de infância trabalhando com o grande químico sir Humphry Davy, na Royal Institution, onde permaneceu por 54 anos. Realizou várias contribuições para todas as áreas das ciências físicas e criou palavras como eletrólise, anodo e catodo. Sua descoberta da indução eletromagnética, em 1831, foi um grande avanço no campo da engenharia, pois fornecia uma maneira de gerar eletricidade. O gerador e o motor elétricos operam segundo esse princípio.

Da Burndy Library Collection na Huntington Library, San Marino, Califórnia.

Perceba pela Equação (6.1) que 1 farad = 1 coulomb/volt.

Embora a capacitância C de um capacitor seja a razão entre a carga q por placa e a tensão aplicada v, ela não depende de q ou v, mas, sim, das dimensões físicas do capacitor. Por exemplo, para o capacitor de placas paralelas, mostrado na Figura 6.1, a capacitância é dada por

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \tag{6.2}$$

onde A é a área de cada placa, d é a distância entre as placas e ϵ é a permissividade do material dielétrico entre as placas. Embora a Equação (6.2) se aplique apenas a capacitores com placas paralelas, podemos inferir a partir dela que, geralmente, três fatores determinam o valor da capacitância:

A capacitância e a tensão nominal de um capacitor são em geral inversamente proporcionais por causa das relações nas Equações (6.1) e (6.2). Há ocorrência de arco voltaico se d for pequena e V alta.

1. A área das placas – quanto maior a área, maior a capacitância.
2. O espaçamento entre as placas – quanto menor o espaçamento, maior a capacitância.
3. A permissividade do material – quanto maior a permissividade, maior a capacitância.

No mercado, encontram-se capacitores de diversos valores e tipos. Normalmente, os capacitores possuem valores na casa dos picofarads (pF) a microfarads (μF) e são descritos conforme o material dielétrico com que são feitos e pelo tipo variável ou então fixo. A Figura 6.3 ilustra os símbolos para os capacitores fixos e variáveis. Observe que, de acordo com a convenção dos sinais, se $v > 0$ e $i > 0$ ou $v < 0$ e $i < 0$, o capacitor está sendo carregado e se $v \cdot i < 0$, o capacitor está sendo descarregado.

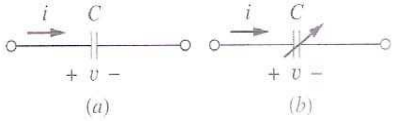


Figura 6.3 Símbolos para capacitores: (*a*) capacitor fixo; (*b*) capacitor variável.

A Figura 6.4 apresenta dois tipos comuns de capacitores de valor fixo. Os capacitores de poliéster são leves, em termos de peso, estáveis e sua variação com a temperatura é previsível. Em vez de poliéster, podem ser usados outros materiais dielétricos como mica e poliestireno. Os capacitores de filme são enrolados e encerrados em filmes plásticos ou metálicos. Já os eletrolíticos produzem uma capacitância extremamente elevada. A Figura 6.5 mostra os tipos mais comuns de capacitores variáveis. A capacitância de um trimmer (ou capacitor de compensação em série) é normalmente colocada em paralelo com outro capacitor de modo que a capacitância equivalente possa ser ligeiramente variada. A capacitância do capacitor variável a ar (placas combinadas) é

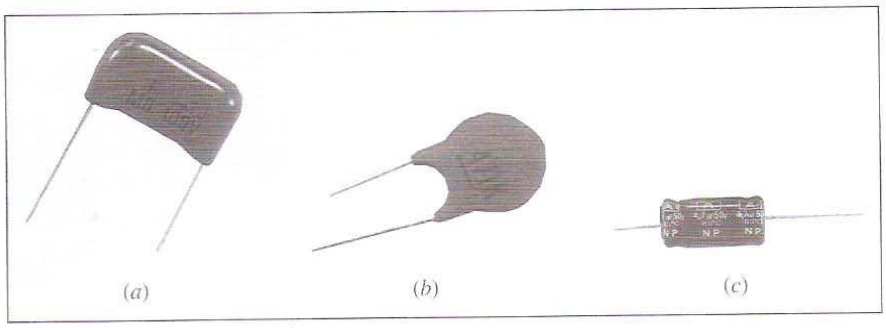


Figura 6.4 Capacitores fixos: (*a*) capacitor de poliéster; (*b*) capacitor cerâmico; (*c*) capacitor eletrolítico. (*Cortesia da Tech America*).

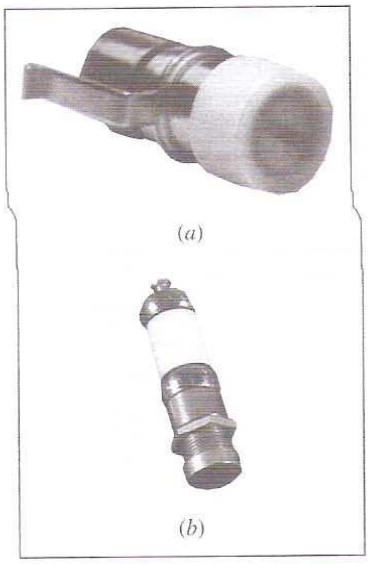


Figura 6.5 Capacitores variáveis: (*a*) trimmer; (*b*) trimmer de filme. (*Cortesia da Johanson.*)

variada girando-se o eixo. Os capacitores variáveis são usados em receptores de rádio, possibilitando a sintonia de várias estações. Além disso, são usados para bloquear CC, deixar passar CA, deslocar fases, armazenar energia, dar partida em motores e suprimir ruído.

Para obter a relação corrente-tensão do capacitor, utilizamos a derivada de ambos os lados da Equação (6.1). Já que

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{6.3}$$

diferenciando ambos os lados da Equação (6.1), obtemos

$$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}} \tag{6.4}$$

Essa é a relação entre corrente e tensão para um capacitor, supondo-se a regra de sinais (passivo). A relação é ilustrada na Figura 6.6 para um capacitor cuja capacitância é independente da tensão. Diz-se que os capacitores que realizam a Equação (6.4) são *lineares*. Para um *capacitor não linear*, o gráfico da relação corrente-tensão não é uma linha reta. E embora alguns capacitores sejam não lineares, a maioria é linear. Neste livro, suporemos que os capacitores sejam sempre lineares.

A relação tensão-corrente de um capacitor linear pode ser obtida integrando ambos os lados da Equação (6.4). Obtemos, então,

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{6.5}$$

ou

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)} \tag{6.6}$$

onde $v(t_0) = q(t_0)/C$ é a tensão no capacitor no instante t_0. A Equação (6.6) mostra que a tensão do capacitor depende do histórico da corrente do capacitor. Portanto, o capacitor tem memória – uma propriedade que é muitas vezes explorada.

A potência instantânea liberada para o capacitor é

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt} \tag{6.7}$$

De acordo com a Equação (6.4), para um capacitor poder transportar corrente, sua tensão tem de variar com o tempo. Portanto, para uma tensão constante, $i = 0$.

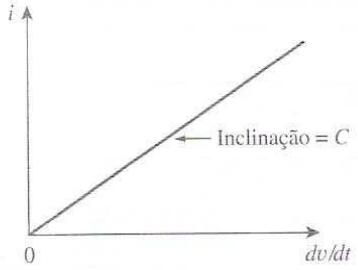


Figura 6.6 Relação tensão-corrente de um capacitor.

A energia armazenada no capacitor é, portanto,

$$w = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = C\int_{-\infty}^{t} v\frac{dv}{d\tau}d\tau = C\int_{v(-\infty)}^{v(t)} v\,dv = \frac{1}{2}Cv^2\Big|_{v(-\infty)}^{v(t)} \tag{6.8}$$

Percebemos que $v(-\infty) = 0$, pois o capacitor foi descarregado em $t = -\infty$. Logo,

$$\boxed{w = \frac{1}{2}Cv^2} \tag{6.9}$$

Usando a Equação (6.1), poderíamos reescrever a Equação (6.9) como segue

$$w = \frac{q^2}{2C} \tag{6.10}$$

As Equações (6.9) ou (6.10) representam a energia armazenada no campo elétrico existente entre as placas do capacitor. Essa energia pode ser recuperada, já que um capacitor ideal não pode dissipar energia. De fato, a palavra *capacitor* deriva da capacidade de esse elemento armazenar energia em um campo elétrico.

Destacamos a seguir as importantes propriedades de um capacitor:

1. Observe da Equação (6.4) que, quando a tensão em um capacitor não está variando com o tempo (isto é, tensão CC), a corrente pelo capacitor é zero. Portanto,

Um **capacitor** é um circuito aberto em CC.

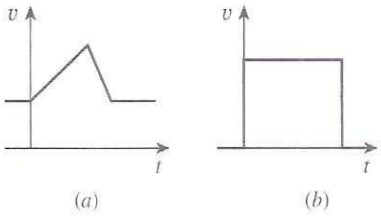
Entretanto, se conectarmos uma bateria (tensão CC) nos terminais de um capacitor, o capacitor carrega.

2. A tensão no capacitor deve ser contínua.

A **tensão** em um capacitor não pode mudar abruptamente.

O capacitor resiste a uma mudança abrupta na tensão entre seus terminais. De acordo com a Equação (6.4), uma mudança descontínua na tensão requer uma corrente infinita, o que é fisicamente impossível. Por exemplo, a tensão em um capacitor pode ter a forma indicada na Figura 6.7*a*, enquanto não é fisicamente possível para a tensão do capacitor assumir a forma mostrada na Figura 6.7*b* em virtude das mudanças abruptas. Em contrapartida, a corrente que passa por um capacitor pode mudar instantaneamente.

3. O capacitor ideal não dissipa energia, mas absorve potência do circuito ao armazenar energia em seu campo e retorna energia armazenada previamente ao liberar potência para o circuito.
4. Um capacitor real, não ideal, possui uma resistência de fuga em paralelo conforme pode ser observado no modelo visto na Figura 6.8. A resistência de fuga pode chegar a valores bem elevados como 100 MΩ e pode ser desprezada para a maioria das aplicações práticas. Por essa razão, suporemos capacitores ideais neste livro.



(*a*) (*b*)

Figura 6.7 A tensão nos terminais de um capacitor: (*a*) permitida; (*b*) não permitida; não é possível uma mudança abrupta.

Uma forma alternativa de verificar isso é usar a Equação (6.9), que indica que a energia é proporcional ao quadrado da tensão. Já que injetar ou extrair energia pode ser realizado apenas ao longo de algum período finito, a tensão não pode mudar instantaneamente em um capacitor.

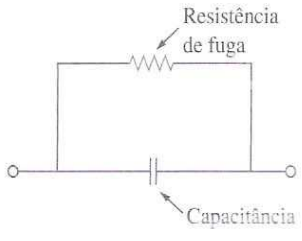


Figura 6.8 Modelo de circuito de um capacitor não ideal.

EXEMPLO 6.1

(a) Calcule a carga armazenada em um capacitor de 3 pF com 20 V entre seus terminais.
(b) Determine a energia armazenada no capacitor.

Solução:
(a) Como $q = Cv$,

$$q = 3 \times 10^{-12} \times 20 = 60 \text{ pC}$$

(b) A energia armazenada é

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-12} \times 400 = 600 \text{ pJ}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.1

Qual é a tensão entre os terminais de um capacitor de 4,5 μF se a carga em uma placa for 0,12 mC? Quanta energia é armazenada?

Resposta: 26,67 V, 1,6 mJ.

EXEMPLO 6.2

A tensão entre os terminais de um capacitor de 5 μF é

$$v(t) = 10 \cos 6.000t \text{ V}$$

Calcule a corrente que passa por ele.

Solução: Por definição, a corrente é

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = 5 \times 10^{-6}\frac{d}{dt}(10 \cos 6.000t)$$
$$= -5 \times 10^{-6} \times 6.000 \times 10 \text{ sen } 6.000t = -0{,}3 \text{ sen } 6.000t \text{ A}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.2

Se um capacitor de 10 μF for conectado a uma fonte de tensão com

$$v(t) = 75 \text{ sen } 2.000t \text{ V}$$

determine a corrente através do capacitor.

Resposta: 1,5 cos 2.000t a.

EXEMPLO 6.3

Determine a tensão através de um capacitor de 2 μF se a corrente através dele for

$$i(t) = 6e^{-3.000t} \text{ mA}$$

Suponha que a tensão inicial no capacitor seja igual a zero.

Solução: Uma vez que $v = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v(0)$ e $v(0) = 0$,

$$v = \frac{1}{2 \times 10^{-6}}\int_0^t 6e^{-3.000t}\,dt \cdot 10^{-3}$$
$$= \frac{3 \times 10^3}{-3.000}e^{-3.000t}\Big|_0^t = (1 - e^{-3.000t}) \text{ V}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.3

A corrente contínua através de um capacitor de 100 μF é $i(t) = 50$ sen 120 π t mA. Calcule a tensão nele nos instantes $t = 1$ ms e $t = 5$ ms. Considere $v(0) = 0$.

Resposta: 93,14 mV; 1,736 V.

EXEMPLO 6.4

Determine a corrente através de um capacitor de 200 μF cuja tensão é mostrada na Figura 6.9.

Solução: A forma de onda da tensão pode ser descrita matematicamente como segue

$$v(t) = \begin{cases} 50t \text{ V} & 0 < t < 1 \\ 100 - 50t \text{ V} & 1 < t < 3 \\ -200 + 50t \text{ V} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma vez que $i = C\,dv/dt$ e $C = 200\ \mu$F, pegamos a derivada de v para obter

$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} 50 & 0 < t < 1 \\ -50 & 1 < t < 3 \\ 50 & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 10 \text{ mA} & 0 < t < 1 \\ -10 \text{ mA} & 1 < t < 3 \\ 10 \text{ mA} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, a forma de onda da corrente é aquela ilustrada na Figura 6.10.

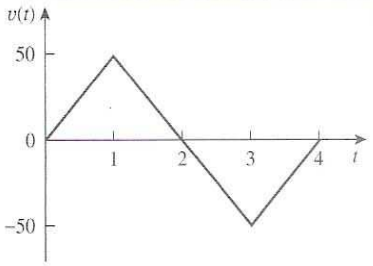


Figura 6.9 Esquema para o Exemplo 6.4.

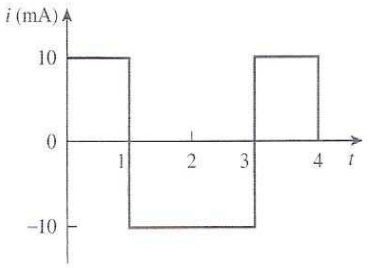


Figura 6.10 Esquema para o Exemplo 6.4.

PROBLEMA PRÁTICO 6.4

Um capacitor inicialmente descarregado de 1 mF possui a corrente mostrada na Figura 6.11 entre seus terminais. Calcule a tensão entre seus terminais nos instantes $t = 2$ ms e $t = 5$ ms.

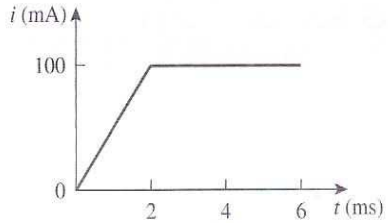


Figura 6.11 Esquema para o Problema prático 6.4.

Resposta: 100 mV, 400 mV.

EXEMPLO 6.5

Obtenha a energia armazenada em cada capacitor na Figura 6.12*a* em condições de CC.

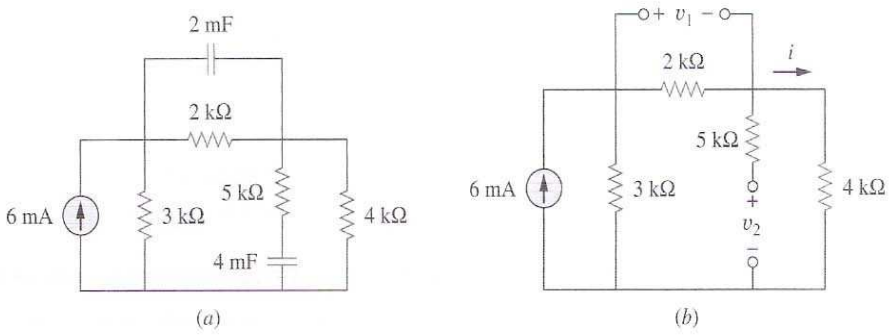


Figura 6.12 Esquema para o Exemplo 6.5.

Solução: Em CC, substituímos cada capacitor por um circuito aberto, conforme mostra a Figura 6.12*b*. A corrente através da associação em série dos resistores de 2 kΩ e de 4 kΩ é obtida por divisão de corrente, como segue

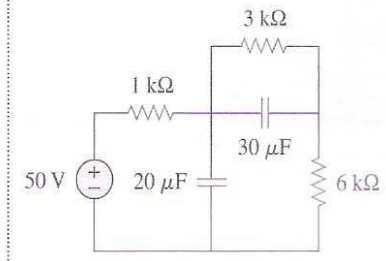


Figura 6.13 Esquema para o Problema prático 6.5.

$$i = \frac{3}{3 + 2 + 4}(6\text{ mA}) = 2\text{ mA}$$

Logo, as tensões v_1 e v_2 nos capacitores são

$$v_1 = 2.000i = 4\text{ V} \qquad v_2 = 4.000i = 8\text{ V}$$

e as energias neles armazenadas são

$$w_1 = \frac{1}{2}C_1v_1^2 = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(4)^2 = 16\text{ mJ}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}C_2v_2^2 = \frac{1}{2}(4 \times 10^{-3})(8)^2 = 128\text{ mJ}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.5

Em condições CC, determine a energia armazenada nos capacitores da Figura 6.13.

Resposta: 20,25 mJ, 3,375 mJ.

6.3 Capacitores em série e em paralelo

Sabemos dos circuitos resistivos que a associação série-paralelo é uma poderosa ferramenta para redução de circuitos. Essa técnica pode ser estendida para ligações série-paralelo de capacitores que são encontradas algumas vezes. Queremos substituir esses capacitores por um único capacitor equivalente C_{eq}.

Para obtermos o capacitor equivalente C_{eq} de N capacitores em paralelo, consideremos o circuito da Figura 6.14*a*, sendo que o seu equivalente se encontra na Figura 6.14*b*. Note que os capacitores possuem a mesma tensão v entre seus terminais. Aplicando a LKC à Figura 6.14*a*,

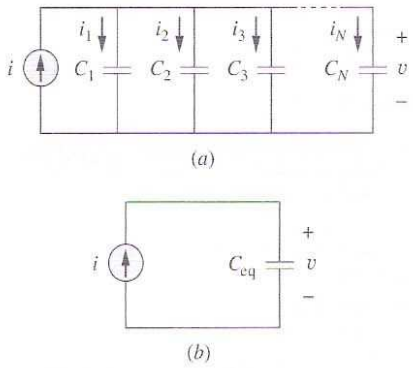


Figura 6.14 (*a*) N capacitores conectados em paralelo; (*b*) circuito equivalente para os capacitores em paralelo.

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N \tag{6.11}$$

Porém, $i_k = C_k dv/dt$. Portanto,

$$\begin{aligned} i &= C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + C_3\frac{dv}{dt} + \cdots + C_N\frac{dv}{dt} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} C_k\right)\frac{dv}{dt} = C_{eq}\frac{dv}{dt} \end{aligned} \tag{6.12}$$

onde

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N \tag{6.13}$$

A **capacitância equivalente** de N capacitores ligados em paralelo é a soma de suas capacitâncias individuais.

Observamos que os capacitores em paralelo se associam da mesma forma que os resistores em série.

Obtenhamos agora a C_{eq} de N capacitores ligados em série comparando o circuito da Figura 6.15*a* com o circuito equivalente da *b*. Perceba que a mesma corrente i passa (e, consequentemente, a mesma carga) pelos capacitores. Aplicando a LKT ao laço da Figura 6.15*a*,

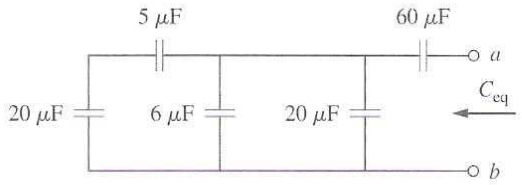


Figura 6.16 Esquema para o Exemplo 6.6.

Solução: Os capacitores de 20 μF e 5 μF estão em série; sua capacitância equivalente é

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\ \mu\text{F}$$

Esse capacitor de 4 μF está em paralelo com os capacitores de 6 μF e de 20 μF; sua capacitância associada é

$$4 + 6 + 20 = 30\ \mu\text{F}$$

Esse capacitor de 30 μF está em série com o capacitor de 60 μF. Portanto, a capacitância equivalente para todo o circuito é

$$C_{eq} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20\ \mu\text{F}$$

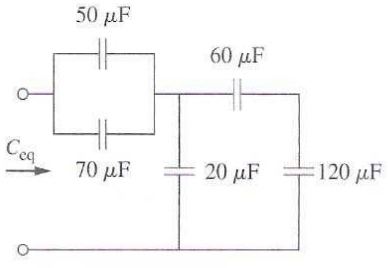


Figura 6.17 Esquema para o Problema prático 6.6.

PROBLEMA PRÁTICO 6.6

Determine a capacitância equivalente nos terminais do circuito da Figura 6.17.

Resposta: 40 μF.

EXEMPLO 6.7

Para o circuito da Figura 6.18, determine a tensão em cada capacitor.

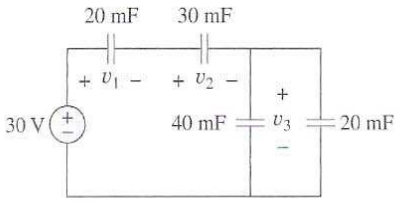


Figura 6.18 Esquema para o Exemplo 6.7.

Solução: Primeiro, determinamos a capacitância equivalente C_{eq}, mostrada na Figura 6.19. Os dois capacitores em paralelo, na Figura 6.18, podem ser associados para obter-se 40 + 20 = 60 mF. Esse capacitor de 60 mF está em série com os capacitores de 20 mF e de 30 mF. Portanto,

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}}\ \text{mF} = 10\ \text{mF}$$

A carga total é

$$q = C_{eq}v = 10 \times 10^{-3} \times 30 = 0{,}3\ \text{C}$$

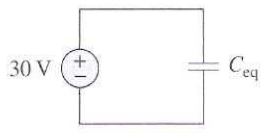


Figura 6.19 Circuito equivalente para a Figura 6.18.

Essa é a carga nos capacitores de 20 mF e 30 mF, pois eles estão em série com a fonte de 30 V. (Uma maneira grosseira de se ver isso é imaginar que a carga atua como a corrente, já que $i = dq/dt$). Portanto,

$$v_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{0{,}3}{20 \times 10^{-3}} = 15\ \text{V} \qquad v_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{0{,}3}{30 \times 10^{-3}} = 10\ \text{V}$$

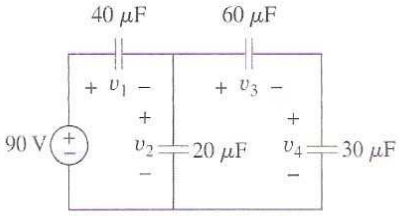


Figura 6.20 Esquema para o Problema prático 6.7.

Tendo sido determinadas v_1 e v_2, agora usamos a LKT para determinar v_3 fazendo

$$v_3 = 30 - v_1 - v_2 = 5\ \text{V}$$

De forma alternativa, visto que os capacitores de 40 mF e 20 mF estão em paralelo, eles têm a mesma tensão v_3 e sua capacitância associada é igual a 40 + 20 = 60 mF. Essa capacitância associada está em série com os capacitores de 20 mF e 30 mF e, consequentemente, tem a mesma carga sobre ela. Portanto,

$$v_3 = \frac{q}{60\ \text{mF}} = \frac{0{,}3}{60 \times 10^{-3}} = 5\ \text{V}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.7

Determine a tensão em cada capacitor na Figura 6.20.

Resposta: $v_1 = 45$ V, $v_2 = 45$ V, $v_3 = 15$ V, $v_4 = 30$ V.

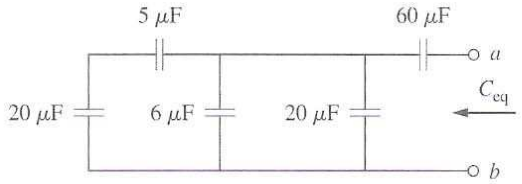


Figura 6.16 Esquema para o Exemplo 6.6.

Solução: Os capacitores de 20 μF e 5 μF estão em série; sua capacitância equivalente é

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\ \mu\text{F}$$

Esse capacitor de 4 μF está em paralelo com os capacitores de 6 μF e de 20 μF; sua capacitância associada é

$$4 + 6 + 20 = 30\ \mu\text{F}$$

Esse capacitor de 30 μF está em série com o capacitor de 60 μF. Portanto, a capacitância equivalente para todo o circuito é

$$C_{eq} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20\ \mu\text{F}$$

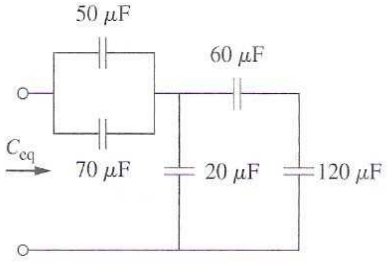


Figura 6.17 Esquema para o Problema prático 6.6.

PROBLEMA PRÁTICO 6.6

Determine a capacitância equivalente nos terminais do circuito da Figura 6.17.

Resposta: 40 μF.

EXEMPLO 6.7

Para o circuito da Figura 6.18, determine a tensão em cada capacitor.

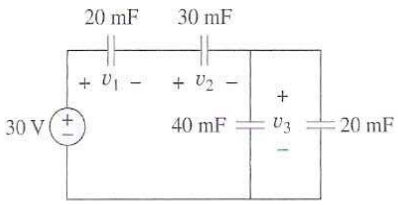


Figura 6.18 Esquema para o Exemplo 6.7.

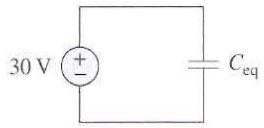


Figura 6.19 Circuito equivalente para a Figura 6.18.

Solução: Primeiro, determinamos a capacitância equivalente C_{eq}, mostrada na Figura 6.19. Os dois capacitores em paralelo, na Figura 6.18, podem ser associados para obter-se 40 + 20 = 60 mF. Esse capacitor de 60 mF está em série com os capacitores de 20 mF e de 30 mF. Portanto,

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}}\ \text{mF} = 10\ \text{mF}$$

A carga total é

$$q = C_{eq}v = 10 \times 10^{-3} \times 30 = 0{,}3\ \text{C}$$

Essa é a carga nos capacitores de 20 mF e 30 mF, pois eles estão em série com a fonte de 30 V. (Uma maneira grosseira de se ver isso é imaginar que a carga atua como a corrente, já que $i = dq/dt$). Portanto,

$$v_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{0{,}3}{20 \times 10^{-3}} = 15\ \text{V} \qquad v_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{0{,}3}{30 \times 10^{-3}} = 10\ \text{V}$$

Tendo sido determinadas v_1 e v_2, agora usamos a LKT para determinar v_3 fazendo

$$v_3 = 30 - v_1 - v_2 = 5\ \text{V}$$

De forma alternativa, visto que os capacitores de 40 mF e 20 mF estão em paralelo, eles têm a mesma tensão v_3 e sua capacitância associada é igual a 40 + 20 = 60 mF. Essa capacitância associada está em série com os capacitores de 20 mF e 30 mF e, consequentemente, tem a mesma carga sobre ela. Portanto,

$$v_3 = \frac{q}{60\ \text{mF}} = \frac{0{,}3}{60 \times 10^{-3}} = 5\ \text{V}$$

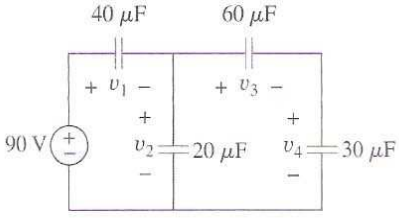


Figura 6.20 Esquema para o Problema prático 6.7.

PROBLEMA PRÁTICO 6.7

Determine a tensão em cada capacitor na Figura 6.20.

Resposta: $v_1 = 45$ V, $v_2 = 45$ V, $v_3 = 15$ V, $v_4 = 30$ V.

6.4 Indutores

Indutor é um elemento passivo projetado para armazenar energia em seu campo magnético. Os indutores têm inúmeras aplicações em eletrônica e sistemas de potência, e são usados em fontes de tensão, transformadores, rádios, TVs, radares e motores elétricos.

Qualquer condutor de corrente elétrica possui propriedades indutivas e pode ser considerado um indutor. Mas, para aumentar o efeito indutivo, um indutor usado na prática é normalmente formado em uma bobina cilíndrica com várias espiras de fio condutor, conforme ilustrado na Figura 6.21.

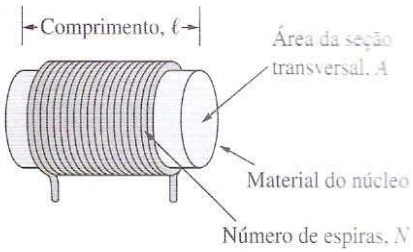


Figura 6.21 Forma típica de um indutor.

Um **indutor** consiste em uma bobina de fio condutor.

Ao passar uma corrente através de um indutor, constata-se que a tensão nele é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente. Usando a regra de sinais (passivo),

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{6.18}$$

onde L é a constante de proporcionalidade denominada *indutância* do indutor. A unidade de indutância é o henry (H), cujo nome foi dado em homenagem ao inventor norte-americano Joseph Henry (1797-1878). Fica evidente pela Equação (6.18) que 1 henry é igual a 1 volt-segundo por ampère.

Considerando a Equação (6.18), para um indutor ter tensão entre seus terminais, sua corrente tem de variar com o tempo. Portanto, $v = 0$ para corrente constante através do indutor.

Indutância é a propriedade segundo a qual um indutor se opõe à mudança do fluxo de corrente através dele, medida em henrys (H).

A indutância de um indutor depende de suas dimensões físicas e de sua construção. As fórmulas para cálculo da indutância dos indutores de diferentes formatos são derivadas da teoria do eletromagnetismo e podem ser encontradas em manuais de engenharia elétrica. Por exemplo, para o indutor (solenóide) mostrado na Figura 6.21,

$$L = \frac{N^2\mu A}{\ell} \tag{6.19}$$

onde N é o número de espiras, ℓ é o comprimento, A é a área da seção transversal e μ é a permeabilidade do núcleo. Podemos observar da Equação (6.19) que a indutância pode ser elevada, aumentando-se o número de espiras da bobina, usando-se material de maior permeabilidade como núcleo, ampliando a área da seção transversal ou reduzindo o comprimento da bobina.

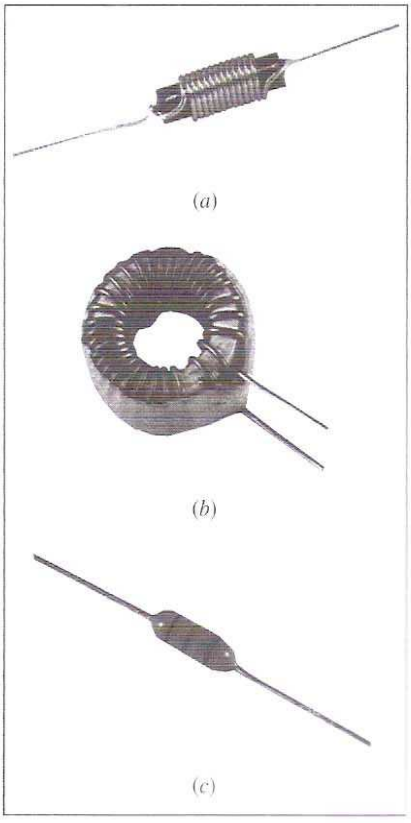


Figura 6.22 Diversos tipos de indutores: (*a*) indutor bobinado solenoidal; (*b*) indutor toroidal; (*c*) indutor em pastilha. (*Cortesia da Tech America.*)

Assim como os capacitores, os indutores encontrados no mercado vêm em diferentes valores e tipos. Os comerciais mais encontrados possuem valores de indutância que vão de poucos microhenrys (μH), como em sistemas de comunicações, a dezenas de henrys (H), como em sistemas de potência. Os indutores podem ser fixos ou variáveis, e seu núcleo pode ser de ferro, aço, plástico ou ar. Os termos *bobina* e *bobina de solenóide* também são usados para indutores. Na Figura 6.22 são apresentados indutores de uso comum. Os símbolos para indutores são mostrados na Figura 6.23, seguindo a regra de sinais (passivo).

A Equação (6.18) é a relação entre tensão e corrente para um indutor. A Figura 6.24 mostra graficamente essa relação para um indutor cuja indutância

Observe as seguintes propriedades importantes de um indutor:

1. Note, da Equação (6.18), que a tensão em um indutor é zero quando a corrente é constante. Portanto,

> Um indutor atua como um curto-circuito em CC.

2. Uma propriedade importante do indutor é que ele se opõe à mudança de fluxo de corrente através dele.

> A corrente através de um indutor não pode mudar instantaneamente.

De acordo com a Equação (6.18), uma mudança descontínua na corrente através de um indutor requer uma tensão infinita, que não é fisicamente possível, portanto, um indutor se opõe a uma mudança abrupta na corrente que passa por ele. Por exemplo, a corrente através de um indutor pode assumir a forma mostrada na Figura 6.25*a*, enquanto a corrente através de um indutor não pode assumir a forma mostrada na Figura 6.25*b*, em situações na prática, em razão de descontinuidades. Entretanto, a tensão em um indutor pode mudar abruptamente.

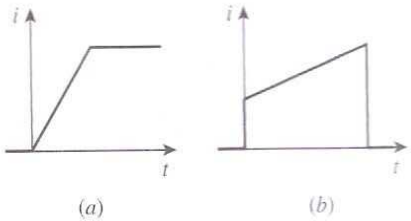


Figura 6.25 Corrente através de um indutor: (*a*) permitida; (*b*) não permitida; uma mudança abrupta não é possível.

3. Assim como o capacitor ideal, o indutor ideal não dissipa energia; a energia armazenada nele pode ser recuperada posteriormente. O indutor absorve potência do circuito quando está armazenando energia e libera potência para o circuito quando retorna a energia previamente armazenada.
4. Um indutor real, não ideal, tem um componente resistivo significativo, conforme pode ser visto na Figura 6.26. Isso se deve ao fato de que o indutor é feito de um material condutor como cobre, que possui certa resistência denominada *resistência de enrolamento* R_w, que aparece em série com a indutância do indutor. A presença de R_w o torna tanto um dispositivo armazenador de energia como um dispositivo dissipador de energia. Uma vez que R_w normalmente é muito pequena, ela é ignorada na maioria dos casos. O indutor não ideal também tem uma *capacitância de enrolamento* C_w em decorrência do acoplamento capacitivo entre as bobinas condutoras. A C_w é muito pequena e pode ser ignorada na maioria dos casos, exceto em altas frequências. Neste livro, consideraremos indutores ideais.

Como, muitas vezes, um indutor é feito de um fio altamente condutor, ele possui uma resistência muito pequena.

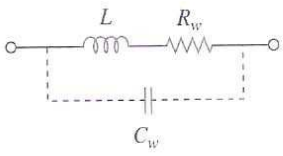


Figura 6.26 Modelo de circuito para um indutor real.

EXEMPLO 6.8

A corrente que passa por um indutor de 0,1 H é $i(t) = 10te^{-5t}$ A. Calcule a tensão no indutor e a energia armazenada nele.

Solução: Como $v = L\,di/dt$ e $L = 0{,}1$ H,

$$v = 0{,}1\frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = e^{-5t} + t(-5)e^{-5t} = e^{-5t}(1 - 5t)\ \text{V}$$

A energia armazenada é

$$w = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(0{,}1)100t^2e^{-10t} = 5t^2e^{-10t}\ \text{J}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.8

Se a corrente através de um indutor de 1 mH for $i(t) = 60\cos 100t$ mA, determine a tensão entre os terminais e a energia armazenada.

Resposta: $-6\operatorname{sen} 100t$ mV, $1{,}8\cos^2(100t)\ \mu$J.

EXEMPLO 6.9

Determine a corrente através de um indutor de 5 H se a tensão nele for

$$v(t) = \begin{cases} 30t^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Determine, também, a energia armazenada no instante $t = 5$ s. Suponha $i(v) > 0$.

Solução: Uma vez que $i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)$ e $L = 5$ H,

$$i = \frac{1}{5}\int_0^t 30t^2\,dt + 0 = 6 \times \frac{t^3}{3} = 2t^3 \text{ A}$$

A potência é $p = vi = 60t^5$. A energia armazenada é então

$$w = \int p\,dt = \int_0^5 60t^5\,dt = 60\frac{t^6}{6}\bigg|_0^5 = 156{,}25 \text{ kJ}$$

Alternativamente, podemos obter a energia armazenada usando a Equação (6.24), escrevendo

$$w|_0^5 = \frac{1}{2}Li^2(5) - \frac{1}{2}Li(0) = \frac{1}{2}(5)(2 \times 5^3)^2 - 0 = 156{,}25 \text{ kJ}$$

conforme obtido anteriormente.

PROBLEMA PRÁTICO 6.9

A tensão entre os terminais de um indutor de 2 H é $v = 10(1 - t)$ V. Determine a corrente que passa através dele no instante $t = 4$ s e a energia armazenada nele no instante $t = 4$s. Suponha $i(0) = 2$ A.

Resposta: –18 A, 320 J.

EXEMPLO 6.10

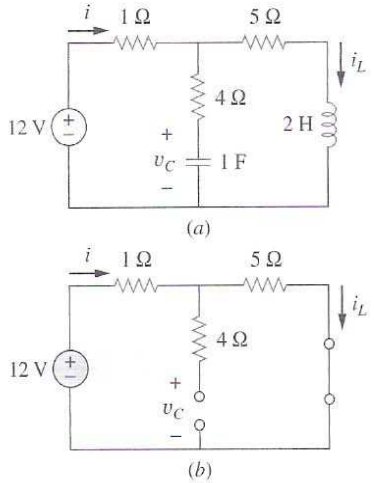


Figura 6.27 Esquema para o Exemplo 6.10.

Considere o circuito da Figura 6.27*a*. Em CC, determine: (a) i, v_C e i_L; (b) a energia armazenada no capacitor e no indutor.

Solução: (a) Em CC, substituímos o capacitor por um circuito aberto e o indutor por um curto-circuito, como na Figura 6.27*b*. Fica claro dessa figura que

$$i = i_L = \frac{12}{1 + 5} = 2 \text{ A}$$

A tensão v_C é a mesma que a tensão no resistor de 5 Ω. Portanto,

$$v_C = 5i = 10 \text{ V}$$

(b) A energia no capacitor é

$$w_C = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}(1)(10^2) = 50 \text{ J}$$

e que no indutor é

$$w_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}(2)(2^2) = 4 \text{ J}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.10

Determine v_C, i_L e a energia armazenada no capacitor e no indutor no circuito da Figura 6.28 em CC.

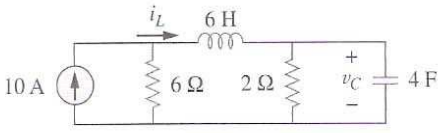


Figura 6.28 Esquema para o Problema prático 6.10.

Resposta: 15 V, 7,5 A, 450 J, 168,75 J.

6.5 Indutores em série e em paralelo

Agora que o indutor foi acrescentado à nossa lista de elementos passivos, é necessário estender a poderosa ferramenta da associação série-paralelo. Precisamos saber como encontrar a indutância equivalente de um conjunto de indutores conectados em série ou em paralelo encontrado em circuitos práticos.

Considere uma ligação em série de N indutores, conforme mostrado na Figura 6.29*a*, com o circuito equivalente apresentado na Figura 6.29*b*. Os indutores têm a mesma corrente passando por eles. Aplicando a LKT ao laço,

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \tag{6.25}$$

Substituindo $v_k = L_k\, di/dt$, obtemos

$$\begin{aligned} v &= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} + \cdots + L_N\frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} L_k\right)\frac{di}{dt} = L_{\text{eq}}\frac{di}{dt} \end{aligned} \tag{6.26}$$

onde

$$\boxed{L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N} \tag{6.27}$$

Assim,

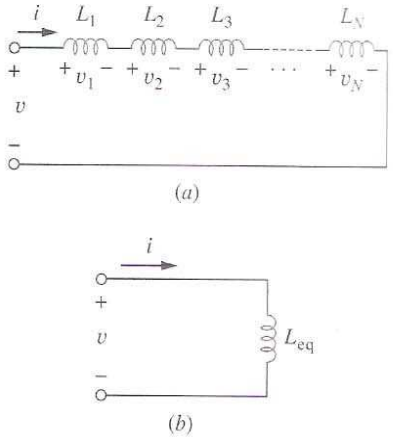


Figura 6.29 (*a*) Uma conexão em série de N indutores; (*b*) circuito equivalente para os indutores em série.

A indutância equivalente de indutores conectados em série é a soma das indutâncias individuais.

Indutores em série são associados exatamente da mesma forma que os resistores em série.

Consideremos agora uma ligação em paralelo de N indutores, como mostrado na Figura 6.30*a*, com o circuito equivalente na Figura 6.30*b*. Os indutores possuem a mesma tensão entre seus terminais. Usando a LKC,

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N \tag{6.28}$$

Porém, $i_k = \dfrac{1}{L_k}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_k(t_0)$; portanto,

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_2(t_0) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v\, dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) \\ &\quad + \cdots + i_N(t_0) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{L_k}\right)\int_{t_0}^{t} v\, dt + \sum_{k=1}^{N} i_k(t_0) = \frac{1}{L_{\text{eq}}}\int_{t_0}^{t} v\, dt + i(t_0) \end{aligned} \tag{6.29}$$

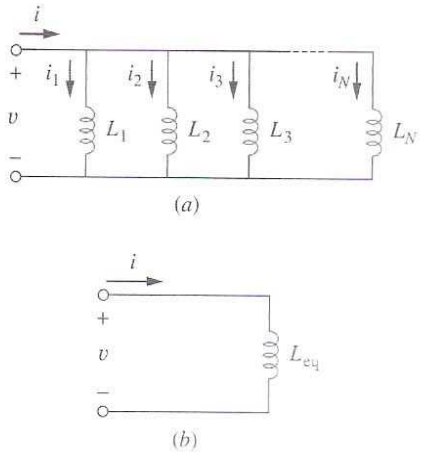


Figura 6.30 (*a*) Ligação em paralelo de N indutores; (*b*) circuito equivalente para os indutores em paralelo.

onde

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N} \tag{6.30}$$

A corrente inicial $i(t_0)$ através de L_{eq} no instante $t = t_0$ deve ser, segundo a LKC, a soma das correntes dos indutores no instante t_0. Portanto, de acordo com a Equação (6.29),

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0)$$

De acordo com a Equação (6.30),

A **indutância equivalente** de indutores paralelos é o inverso da soma dos inversos das indutâncias individuais.

Observe que os indutores em paralelo são associados da mesma maneira que os resistores em paralelo.

Para dois indutores em paralelo ($N = 2$), a Equação (6.30) fica

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{ou} \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{6.31}$$

Desde que todos os elementos sejam do mesmo tipo, as transformações triângulo-estrela para resistores, discutidas na Seção 2.7, podem ser estendidas aos capacitores e indutores.

Nesse ponto, é apropriado fazermos um resumo das características mais importantes dos elementos de circuito básicos vistos até então. Este resumo é dado na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 • Características importantes dos elementos básicos.[†]

Relação	Resistor (R)	Capacitador (C)	Indutor (L)
v-i:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)$	$v = L\frac{di}{dt}$
i-v:	$i = v/R$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$
p ou w:	$p = i^2R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2}Cv^2$	$w = \frac{1}{2}Li^2$
Série:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
Paralelo:	$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}$
Em CC:	Idem	Circuito aberto	Curto-circuito
Variável do cicuito que não pode mudar abruptamente:	Não se aplica	v	i

[†] Supõe-se o uso da regra de sinais (passivo).

EXEMPLO 6.11

Determine a indutância equivalente do circuito mostrado na Figura 6.31.

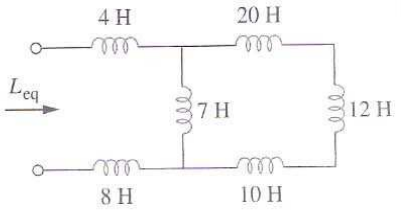


Figura 6.31 Esquema para o Exemplo 6.11.

Solução: Os indutores de 10 H, 12 H e 20 H estão em série, portanto, associá-los resulta em uma indutância de 42 H, que está em paralelo com o indutor de 7 H de modo que eles são associados para dar

$$\frac{7 \times 42}{7 + 42} = 6 \text{ H}$$

Esse indutor de 6 H está em série com os indutores de 4 H e 8 H. Portanto,

$$L_{eq} = 4 + 6 + 8 = 18 \text{ H}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.11

Calcule a indutância equivalente para o circuito indutivo em escada da Figura 6.32.

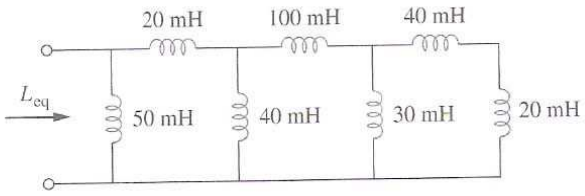


Figura 6.32 Esquema para o Problema prático 6.11.

Resposta: 25 mH.

EXEMPLO 6.12

Para o circuito da Figura 6.33, $i(t) = 4(2 - e^{-10t})$ mA. Se $i_2(0) = -1$ mA, determine: (a) $i_1(0)$; (b) $v(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$; (c) $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

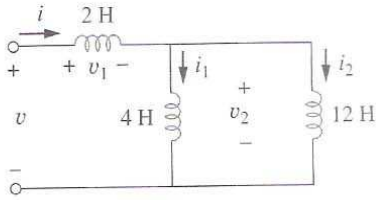


Figura 6.33 Esquema para o Exemplo 6.12.

Solução: (a) A partir de $i(t) = 4(2 - e^{-10t})$ mA, $i(0) = 4(2 - 1) = 4$ mA. Uma vez que $i = i_1 + i_2$,

$$i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4 - (-1) = 5 \text{ mA}$$

(b) A indutância equivalente é

$$L_{eq} = 2 + 4 \parallel 12 = 2 + 3 = 5 \text{ H}$$

Portanto,

$$v(t) = L_{eq}\frac{di}{dt} = 5(4)(-1)(-10)e^{-10t} \text{ mV} = 200e^{-10t} \text{ mV}$$

e

$$v_1(t) = 2\frac{di}{dt} = 2(-4)(-10)e^{-10t} \text{ mV} = 80e^{-10t} \text{ mV}$$

Uma vez que $v = v_1 + v_2$,

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = 120e^{-10t} \text{ mV}$$

(c) A corrente i_1 é obtida como segue:

$$i_1(t) = \frac{1}{4}\int_0^t v_2\, dt + i_1(0) = \frac{120}{4}\int_0^t e^{-10t}\, dt + 5 \text{ mA}$$
$$= -3e^{-10t}\Big|_0^t + 5 \text{ mA} = -3e^{-10t} + 3 + 5 = 8 - 3e^{-10t} \text{ mA}$$

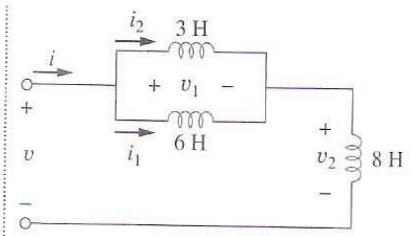


Figura 6.34 Esquema para o Problema prático 6.12.

PROBLEMA PRÁTICO 6.12

De modo similar,

$$i_2(t) = \frac{1}{12}\int_0^t v_2\,dt + i_2(0) = \frac{120}{12}\int_0^t e^{-10t}\,dt - 1\text{ mA}$$

$$= -e^{-10t}\Big|_0^t - 1\text{ mA} = -e^{-10t} + 1 - 1 = -e^{-10t}\text{ mA}$$

Note que $i_1(t) + i_2(t) = i(t)$.

No circuito da Figura 6.34, $i_1(t) = 0{,}6e^{-2t}$ A. Se $i(0) = 1{,}4$ A, determine:
(a) $i_2(0)$; (b) $i_2(t)$ e $i(t)$; (c) $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v(t)$.

Resposta: (a) 800 mA, (b) $(-0{,}4 + 1{,}2e^{-2t})$ A, $(-0{,}4 + 1{,}8e^{-2t})$ A, (c) $-36e^{-2t}$ V, $-7{,}2e^{-2t}$ V, $-28{,}8e^{-2t}$ V.

6.6 †Aplicações

Elementos de circuito como resistores e capacitores encontram-se disponíveis no mercado em qualquer forma discreta ou em circuito integrado (CI). Diferentemente dos capacitores e resistores, os indutores com indutância considerável são difíceis de ser produzidos em substratos de CI. Consequentemente, os indutores (bobinas) normalmente vêm na forma discreta e tendem a ser mais volumosos e caros; por essa razão, não são tão versáteis como os capacitores e resistores, sendo mais limitados em aplicações. Entretanto, há diversas aplicações nas quais os indutores não têm nenhum substituto prático. Eles são usados rotineiramente em relés, circuitos de retardo, dispositivos de detecção (sensores), agulhas de toca-discos, circuitos telefônicos, receptores de rádio e TV, fontes de alimentação, motores elétricos, microfones e alto-falantes, citando apenas alguns exemplos.

Os capacitores e indutores possuem três propriedades especiais, que os tornam muito úteis nos circuitos elétricos:

1. Capacidade de armazenar energia, que os torna úteis como fontes de tensão e de corrente temporárias. Consequentemente, eles podem ser usados para gerar uma tensão ou corrente muito altas por um curto período.
2. Capacitores que se opõem a mudanças na tensão, enquanto os indutores se opõem a qualquer mudança abrupta na corrente. Essa propriedade torna os indutores úteis para supressão de arcos ou centelhas e para conversão de tensão CC pulsante em tensão CC relativamente suave.
3. Capacitores e indutores, que são sensíveis à frequência. Essa propriedade os torna úteis para discriminadores de frequência.

As duas primeiras propriedades são colocadas em prática em circuitos CC, enquanto a terceira é aproveitada em circuitos CA. Veremos como serão úteis essas propriedades em capítulos posteriores. Por enquanto, consideraremos três aplicações envolvendo capacitores e amplificadores operacionais: integrador, diferenciador e computador analógico.

6.6.1 Integrador

Entre os circuitos com amplificadores operacionais importantes que usam elementos armazenadores de energia, temos os integradores e os diferenciadores. Esses circuitos normalmente envolvem resistores e capacitores; os indutores (bobinas) tendem a ser mais volumosos e mais caros.

O integrador com amplificadores operacionais é usado em várias aplicações, especialmente em computadores analógicos, a serem vistos na Seção 6.6.3.

Integrador é um circuito com amplificador operacional cuja saída é proporcional à integral do sinal de entrada.

Se o resistor de realimentação R_f no familiar amplificador inversor da Figura 6.35*a* for substituído por um capacitor, obteremos um integrador ideal, conforme mostra a Figura 6.35*b*. É interessante notar que é possível obter uma representação matemática da integração dessa forma. No nó *a* na Figura 6.35*b*,

$$i_R = i_C \tag{6.32}$$

porém,

$$i_R = \frac{v_i}{R}, \qquad i_C = -C\frac{dv_o}{dt}$$

Substituindo estas na Equação (6.32), obtemos

$$\frac{v_i}{R} = -C\frac{dv_o}{dt} \tag{6.33a}$$

$$dv_o = -\frac{1}{RC}v_i\,dt \tag{6.33b}$$

Integrando ambos os lados da equação, temos

$$v_o(t) - v_o(0) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(\tau)d\tau \tag{6.34}$$

Para garantir que $v_o(0) = 0$, é necessário sempre descarregar o capacitor do integrador antes da aplicação de um sinal. Supondo $v_o(0) = 0$,

$$\boxed{v_o = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(\tau)d\tau} \tag{6.35}$$

que mostra que o circuito da Figura 6.35*b* fornece uma tensão de saída proporcional à integral da entrada. Na prática, o integrador com amplificador operacional requer um resistor de realimentação para reduzir o ganho CC e evitar saturação. Deve-se tomar cuidado para que o amplificador operacional opere dentro do intervalo linear de modo que ele não venha a saturar.

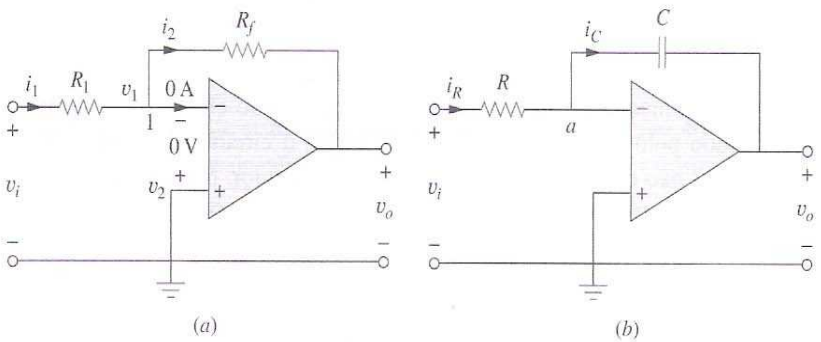


Figura 6.35 Substituir o resistor de realimentação no amplificador inversor em (*a*) produz um integrador em (*b*).

EXEMPLO 6.13

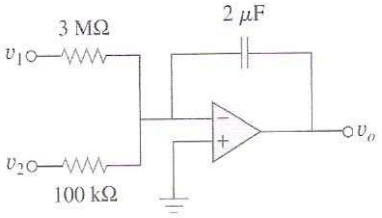


Figura 6.36 Esquema para o Exemplo 6.13.

Se $v_1 = 10 \cos 2t$ mV e $v_2 = 0{,}5t$ mV, determine v_o no circuito com amplificadores operacionais da Figura 6.36. Suponha que a tensão no capacitor seja inicialmente zero.

Solução: Esse circuito é um integrador somador e

$$v_o = -\frac{1}{R_1 C}\int v_1\,dt - \frac{1}{R_2 C}\int v_2\,dt$$

$$= -\frac{1}{3 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6}}\int_0^t 10\cos(2\tau)d\tau$$

$$-\frac{1}{100 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6}}\int_0^t 0{,}5\tau d\tau$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{10}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{0{,}2}\frac{0{,}5t^2}{2} = -0{,}833 \operatorname{sen} 2t - 1{,}25t^2 \text{ mV}$$

PROBLEMA PRÁTICO 6.13

O integrador da Figura 6.35*b* tem $R = 100$ kΩ e $C = 20$ μF. Determine a tensão de saída quando uma tensão CC de 2,5 mV é aplicada no instante $t = 0$. Suponha que o amplificador operacional esteja inicialmente com o offset ajustado.

Resposta: $-1{,}25t$ mV.

6.6.2 Diferenciador

Diferenciador é um circuito com amplificador operacional cuja saída é proporcional à taxa de variação do sinal de entrada.

Na Figura 6.35*a*, se o resistor de entrada for substituído por um capacitor, o circuito resultante é um diferenciador, como mostra a Figura 6.37. Aplicando a LKC ao nó *a*,

$$i_R = i_C \tag{6.36}$$

Porém,

$$i_R = -\frac{v_o}{R}, \qquad i_C = C\frac{dv_i}{dt}$$

Substituir estas na Equação (6.36) nos leva a

$$\boxed{v_o = -RC\frac{dv_i}{dt}} \tag{6.37}$$

demonstrando que a saída é a derivada da entrada. Os circuitos diferenciadores são eletronicamente instáveis, pois qualquer ruído elétrico nele é muito amplificado pelo diferenciador. Por essa razão, o circuito diferenciador da Figura 6.37 não é tão útil e popular como o integrador. Na prática, ele raramente é usado.

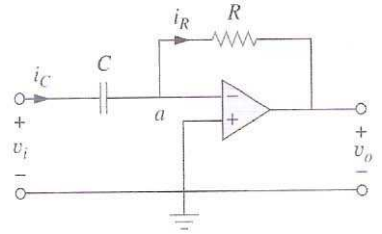


Figura 6.37 Diferenciador com amplificador operacional.

EXEMPLO 6.14

Esboce a tensão de saída para o circuito da Figura 6.38*a*, dada a tensão de entrada na Figura 6.38*b*. Considere $v_o = 0$ em $t = 0$.

Solução: Trata-se de um diferenciador com

$$RC = 5 \times 10^3 \times 0{,}2 \times 10^{-6} = 10^{-3}\ \text{s}$$

Para $0 < t < 4$ ms, podemos expressar a tensão de entrada na Figura 6.38*b* como

$$v_i = \begin{cases} 2.000t & 0 < t < 2\ \text{ms} \\ 8 - 2.000t & 2 < t < 4\ \text{ms} \end{cases}$$

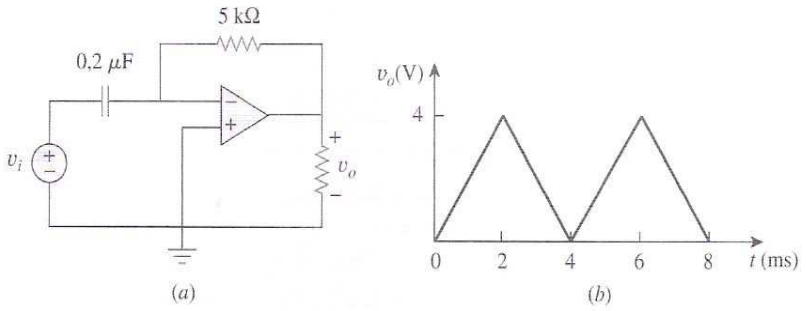


Figura 6.38 Esquema para o Exemplo 6.14.

Isso é repetido para $4 < t < 8$ ms. Usando a Equação (6.37), a saída é obtida como segue

$$v_o = -RC\frac{dv_i}{dt} = \begin{cases} -2\ \text{V} & 0 < t < 2\ \text{ms} \\ 2\ \text{V} & 2 < t < 4\ \text{ms} \end{cases}$$

Portanto, a saída tem a forma esboçada na Figura 6.39.

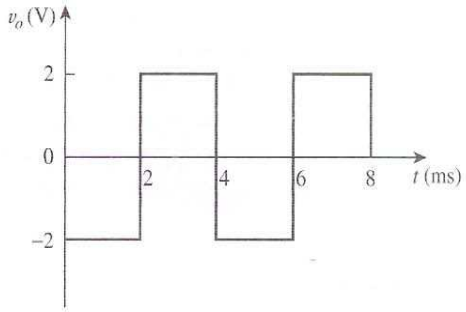


Figura 6.39 Saída do circuito da Figura 6.38*a*.

PROBLEMA PRÁTICO 6.14

O diferenciador da Figura 6.37 tem $R = 100$ kΩ e $C = 0{,}1$ μF. Dado que $v_i = 1{,}25t$ V, determine a saída v_o.

Resposta: –12,5 mV.

6.6.3 Computador analógico

Os amplificadores operacionais foram desenvolvidos inicialmente para computadores analógicos, os quais podem ser programados para solucionar modelos matemáticos de sistemas mecânicos ou elétricos, que são normalmente expressos em termos de equações diferenciais.

Resolver equações diferenciais simples por intermédio de um computador analógico requer colocar em cascata três tipos de circuitos com amplificadores operacionais: circuitos integradores, amplificadores somadores e amplificadores inversores/não inversores para aplicação de fatores de escala positivos. A melhor maneira de ilustrar como um computador analógico resolve uma equação diferencial é por meio de um exemplo.

Suponha que queiramos a solução $x(t)$ da equação

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t), \qquad t > 0 \tag{6.38}$$

onde a, b e c são constantes e $f(t)$ é uma função forçada arbitrária. A solução é obtida resolvendo inicialmente o termo de derivada de ordem mais alta. Calculando d^2x/dt^2, temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(t)}{a} - \frac{b}{a}\frac{dx}{dt} - \frac{c}{a}x \tag{6.39}$$

Para obter dx/dt, o termo d^2x/dt^2 é integrado e invertido. Finalmente, para obter x, o termo dx/dt é integrado e invertido. A função é inserida no ponto apropriado, portanto, o computador analógico para resolver a Equação (6.38) é implementado interligando-se os somadores, inversores e integradores necessários. Podemos utilizar um plotter ou osciloscópio para ver a saída x ou dx/dt ou d^2x/dt^2, dependendo se ele estiver conectado ao sistema ou não.

Embora o exemplo anterior seja de uma equação diferencial de segunda ordem, qualquer equação diferencial pode ser simulada por um computador analógico, formado por integradores, inversores e somadores inversores. Porém, deve-se tomar cuidado ao selecionar os valores de resistores e capacitores para garantir que os amplificadores operacionais não se saturem durante o intervalo de tempo da solução.

Os computadores analógicos a válvulas foram construídos nas décadas de 1950 e 1960. Seu uso caiu recentemente, pois foram superados por modernos computadores digitais, entretanto, ainda estudamos os computadores analógicos por duas razões. Primeiro, a disponibilidade de amplificadores operacionais integrados tornou possível a construção de computadores analógicos de forma fácil e barata. Em segundo lugar, ter uma visão geral dos computadores analógicos ajuda na compreensão dos computadores digitais.

EXEMPLO 6.15

Projete um circuito de computador analógico para resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = 10 \operatorname{sen} 4t, \qquad t > 0$$

sujeito a $v_o(0) = -4$, $v_o'(0) = 1$, em que a primeira se refere à derivada do tempo.

Solução:

1. ***Definição.*** Temos um problema claramente definido e uma solução esperada. Devemos relembrar os estudantes que, em várias situações, o problema não se encontra tão bem definido e esta parte do processo de resolução de problemas poderia exigir um esforço muito maior. Se esse for o caso, então se deve sempre ter em mente que o tempo gasto aqui resultará em um esforço muito menor posteriormente e muito provavelmente iria lhe poupar uma série de transtornos no processo.
2. ***Apresentação.*** Fica claro que o emprego dos dispositivos apresentados na Seção 6.6.3 nos permitirá criar o circuito de computador analógico desejado. Precisaremos dos circuitos integradores (possivelmente combinados com uma capacidade de somador) e um ou mais circuitos inversores.
3. ***Alternativa.*** A abordagem para resolução desse problema é simples e objetiva. Precisaremos pegar os valores corretos de resistores e capacitores para podermos concretizar a equação que estamos representando. A saída final do circuito dará o resultado desejado.
4. ***Tentativa.*** Há um número infinito de possibilidades na escolha de resistores e capacitores, muitas das quais resultarão em soluções corretas. Valores muito

altos para resistores e capacitores resultarão em saídas incorretas. Por exemplo, valores baixos de resistores sobrecarregarão o circuito, e pegar valores de resistores que são muito grandes fará os amplificadores operacionais pararem de funcionar como dispositivos ideais. Os limites podem ser determinados a partir das características do amplificador operacional real.

Resolvemos, primeiro, a segunda derivada como segue

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = 10 \operatorname{sen} 4t - 2\frac{dv_o}{dt} - v_o \tag{6.15.1}$$

Essa resolução requer algumas operações matemáticas, entre as quais soma, aplicação de fator de escala e integração. Integrando ambos os lados da Equação (6.15.1) resulta em

$$\frac{dv_o}{dt} = -\int_0^t \left(-10 \operatorname{sen}(4\tau) + 2\frac{dv_o(\tau)}{d\tau} + v_o(\tau)\right)d\tau + v_o'(0) \tag{6.15.2}$$

onde $v_o'(0) = 1$. Implementamos a Equação (6.15.2) usando o integrador somador mostrado na Figura 6.40*a*. Os valores dos resistores e capacitores foram escolhidos de forma que $RC = 1$ para o termo

$$-\frac{1}{RC}\int_0^t v_o(\tau)d\tau$$

Outros termos no integrador somador da Equação (6.15.2) são consequentemente implementados. A condição inicial $dv_o(0)/dt = 1$ é implementada conectando ao capacitor uma fonte de 1 V com uma chave, como mostrado na Figura 6.40*a*.

A próxima etapa é obter v_o integrando dv_o/dt e invertendo o resultado,

$$v_o = -\int_0^t \left(-\frac{dv_o(\tau)}{d\tau}\right)d\tau + v(0) \tag{6.15.3}$$

Isso é implementado pelo circuito da Figura 6.40*b* com a fonte fornecendo a condição inicial de −4 V. Agora, associamos os dois circuitos na Figura 6.40*a*-*b* para obter o circuito completo, apresentado na Figura 6.40*c*. Quando for aplicado o sinal de entrada 10 sen 4*t*, abrimos as chaves em $t = 0$ para obter a forma de onda de saída v_o, que pode ser vista em um osciloscópio.

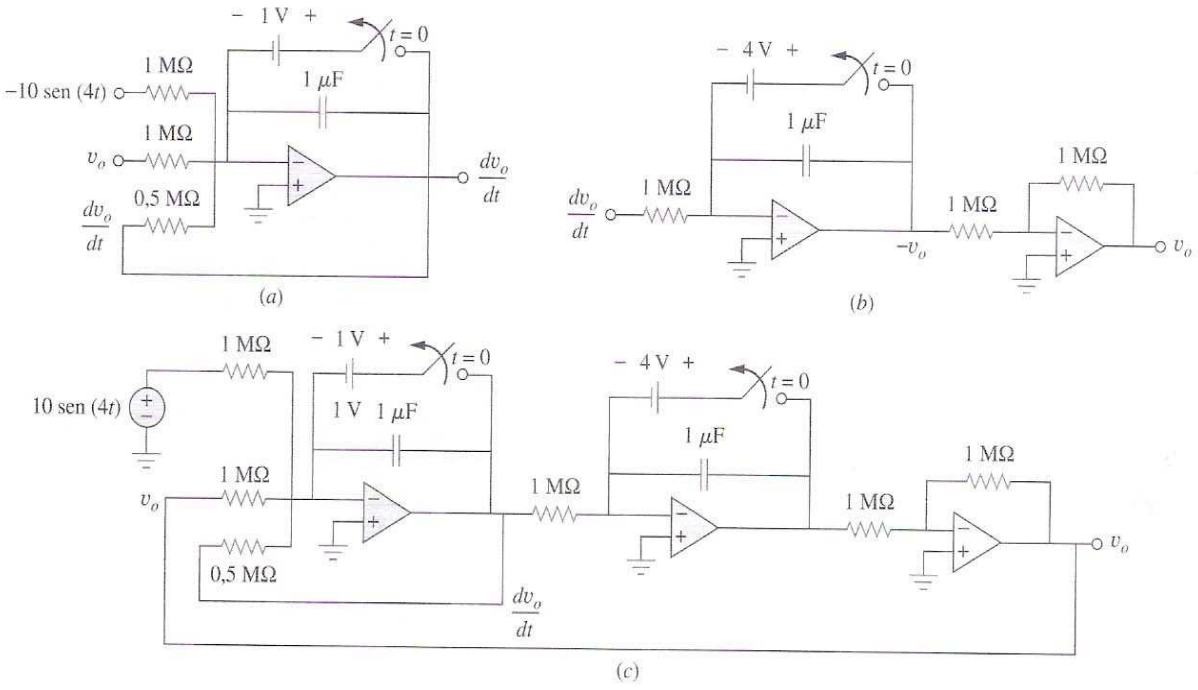


Figura 6.40 Esquema para o Exemplo 6.15.

5. ***Avaliação.*** A resposta parece correta, mas será que ela realmente está? Se for desejada uma solução real para v_o, então uma ótima verificação seria primeiro encontrar a solução construindo o circuito no *PSpice*. Esse resultado poderia ser então comparado com uma solução usando a capacidade de solução diferencial do *MATLAB*.

   Já que o que é preciso fazer é apenas verificar o circuito e confirmar que ele representa a equação, existe uma técnica mais fácil de ser utilizada, simplesmente percorremos o circuito e verificamos se ele gera a equação desejada.

   Entretanto, ainda temos opções a serem feitas. Poderíamos percorrer o circuito da esquerda para a direita, mas isso envolveria a diferenciação do resultado para obter a equação original. Uma abordagem mais fácil seria percorrer o circuito da direita para a esquerda. Essa é a abordagem que usaremos para verificar a resposta.

   Iniciando com a saída, v_o, vemos que o amplificador operacional do lado direito nada mais é que um inversor com ganho unitário. Isso significa que a saída do circuito central é $-v_o$. A equação a seguir representa a ação do circuito central.

$$-v_o = -\left(\int_0^t \frac{dv_o}{dt}\,dt + v_o(0)\right) = -\left(v_o\Big|_0^t + v_o(0)\right)$$
$$= -(v_o(t) - v_o(0) + v_o(0))$$

   onde $v_o(0) = -4$ V é a tensão inicial no capacitor.

   Verificamos o circuito do lado esquerdo da mesma forma.

$$\frac{dv_o}{dt} = -\left(\int_0^t -\frac{d^2v_o}{dt^2}dt - v_o'(0)\right) = -\left(-\frac{dv_o}{dt} + v_o'(0) - v_o'(0)\right)$$

   Agora, resta verificarmos se a entrada para o primeiro AOP é $-d^2v_o/dt^2$.

   Examinando a entrada, vemos que ela é igual a

$$-10\,\text{sen}(4t) + v_o + \frac{1/10^{-6}}{0{,}5\ \text{M}\Omega}\frac{dv_o}{dt} = -10\,\text{sen}(4t) + v_o + 2\frac{dv_o}{dt}$$

   que realmente produz $-d^2v_o/dt^2$ da equação original.

6. ***Satisfatória?*** A solução obtida é satisfatória. Agora, podemos apresentar esse desenvolvimento como uma solução para o problema.

PROBLEMA PRÁTICO 6.15

Projete um circuito de computador analógico para resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 3\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 4\cos 10t, \qquad t > 0$$

sujeito a $v_o(0) = 2$, $v_o'(0) = 0$.

Resposta: Ver Figura 6.41, onde $RC = 1$ s.

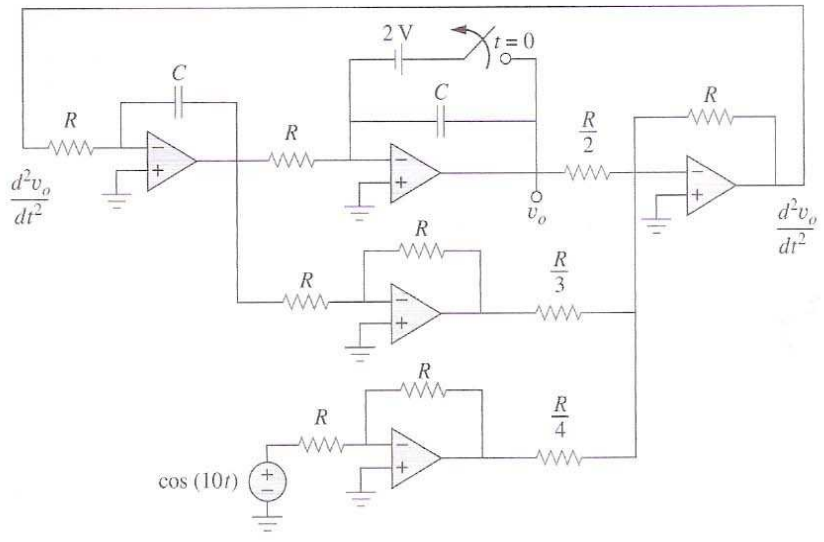


Figura 6.41 Esquema para o Problema prático 6.15.

6.7 Resumo

1. A corrente através de um capacitor é diretamente proporcional à taxa de variação da tensão em seus terminais.

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

A corrente através de um capacitor é zero a menos que a tensão varie. Portanto, um capacitor atua como um circuito aberto para uma fonte de tensão CC.

2. A tensão em um capacitor é diretamente proporcional à integral no tempo da corrente que passa por ele.

$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v(t_0)$$

A tensão em um capacitor não pode mudar instantaneamente.

3. Capacitores em série e em paralelo são associados da mesma forma que condutâncias.
4. A tensão em um indutor é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente que passa por ele.

$$v = L\frac{di}{dt}$$

A tensão no indutor é zero a menos que a corrente varie. Portanto, um indutor atua como um curto-circuito para uma fonte CC.

5. A corrente através de um indutor é diretamente proporcional à integral no tempo da tensão neste componente.

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i(t_0)$$

A corrente através de um indutor não pode mudar instantaneamente.

6. Indutores em série e em paralelo são associados da mesma forma que resistores em série e em paralelo são associados.
7. Em dado instante t, a energia armazenada em um capacitor é $\frac{1}{2}Cv^2$ enquanto a energia armazenada em um indutor é $\frac{1}{2}Li^2$.
8. Três circuitos de aplicação, o integrador, o diferenciador e o computador analógico, podem ser construídos usando resistores, capacitores e amplificadores operacionais.

Questões para revisão

6.1 Qual a carga em um capacitor de 5 F quando ele é conectado a uma fonte de 120 V?

(a) 600 C (b) 300 C
(c) 24 C (d) 12 C

6.2 A capacitância é medida em:

(a) coulombs (b) joules
(c) henrys (d) farads

6.3 Quando a carga total em um capacitor é dobrada, a energia armazenada:

(a) permanece a mesma (b) é dividida pela metade
(c) é dobrada (d) é quadruplicada

6.4 A forma de onda da tensão representada na Figura 6.42 pode ser associada a um capacitor real?

(a) Sim (b) Não

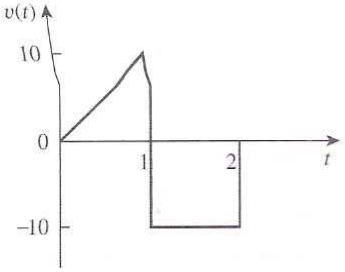


Figura 6.42 Esquema para a Questão para revisão 6.4.

6.5 A capacitância total de dois capacitores de 40 mF em série associada em paralelo com um capacitor de 4 mF é igual a:

(a) 3,8 mF (b) 5 mF (c) 24 mF
(d) 44 mF (e) 84 mF

6.6 Na Figura 6.43, se $i = \cos 4t$ e $v = \text{sen } 4t$, o componente é um:

(a) resistor (b) capacitor (c) indutor

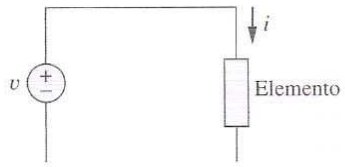


Figura 6.43 Esquema para a Questão para revisão 6.6.

6.7 Um indutor de 5 H muda sua corrente de 3 A em 0,2 s. A tensão produzida nos terminais do indutor é:

(a) 75 V (b) 8,888 V
(c) 3 V (d) 1,2 V

6.8 Se a corrente através de um indutor de 10 mH aumenta de zero a 2 A, qual é a quantidade de energia armazenada no indutor?

(a) 40 mJ (b) 20 mJ
(c) 10 mJ (d) 5 mJ

6.9 Indutores em paralelo podem ser associados da mesma forma que resistores em paralelo.

(a) Verdadeiro (b) Falso

6.10 Para o circuito da Figura 6.44, a fórmula para o divisor de tensão é:

(a) $v_1 = \dfrac{L_1 + L_2}{L_1} v_s$ (b) $v_1 = \dfrac{L_1 + L_2}{L_2} v_s$

(c) $v_1 = \dfrac{L_2}{L_1 + L_2} v_s$ (d) $v_1 = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} v_s$

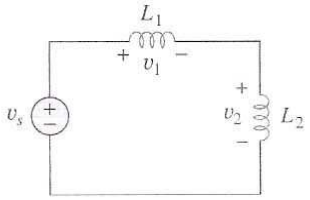


Figura 6.44 Esquema para a Questão para revisão 6.10.

Respostas: 6.1a, 6.2d, 6.3d, 6.4b, 6.5c, 6.6b, 6.7a, 6.8b, 6.9a, 6.10d.

Problemas

Seção 6.2 Capacitores

6.1 Se a tensão em um capacitor de 7,5 F for $2te^{-3t}$ V, determine a corrente e a potência.

6.2 Um capacitor de 50 μF possui energia $w(t) = 10 \cos^2 377t$ J. Determine a corrente que passa pelo capacitor.

6.3 Elabore um problema para ajudar outros estudantes a entenderem melhor como os capacitores funcionam.

6.4 Uma corrente de 4 sen $4t$ A passa por um capacitor de 5 F. Descubra a tensão $v(t)$ no capacitor dado que $v(0) = 1$ V.

6.5 A tensão em um capacitor de 4 μF é mostrada na Figura 6.45. Descubra a forma de onda da corrente.

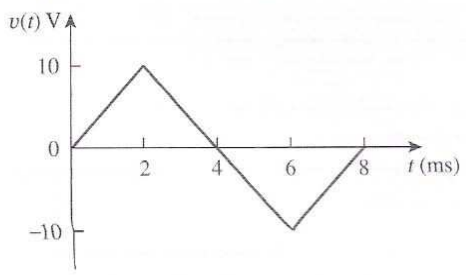


Figura 6.45 Esquema para o Problema 6.5.

6.6 A forma de onda da tensão apresentada na Figura 6.46 é aplicada em um capacitor de 55 μF. Desenhe a forma de onda da corrente que passa por ele.

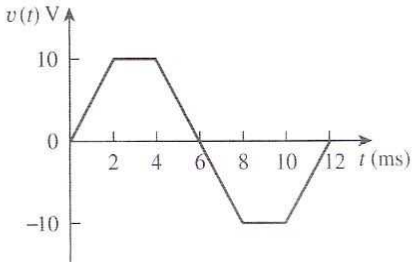


Figura 6.46 Esquema para o Problema 6.6.

6.7 Em $t = 0$, a tensão em um capacitor de 25 mF é 10 V. Calcule a tensão no capacitor para $t > 0$ quando a corrente $5t$ mA passa através dele.

6.8 Um capacitor de 4 mF apresenta a seguinte tensão em seus terminais.

$$v = \begin{cases} 50 \text{ V}, & t \le 0 \\ Ae^{-100t} + Be^{-600t} \text{ V}, & t \ge 0 \end{cases}$$

Se o capacitor tiver uma corrente inicial de 2 A, determine:

(a) As constantes A e B.

(b) A energia armazenada no capacitor em $t = 0$.

(c) A corrente no capacitor para $t > 0$.

6.9 A corrente através de um capacitor de 0,5 F é $6(1 - e^{-t})$ A. Determine a tensão e a potência em $t = 2$ s. Suponha $v(0) = 0$.

6.10 A tensão em um capacitor de 5 mF é mostrada na Figura 6.47. Determine a corrente através do capacitor.

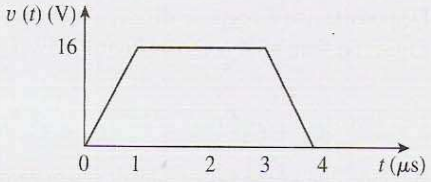


Figura 6.47 Esquema para o Problema 6.10.

6.11 Um capacitor de 4 mF tem a forma de onda para corrente apresentada na Figura 6.48. Supondo que $v(0) = 10$ V, esboce a forma de onda da tensão $v(t)$.

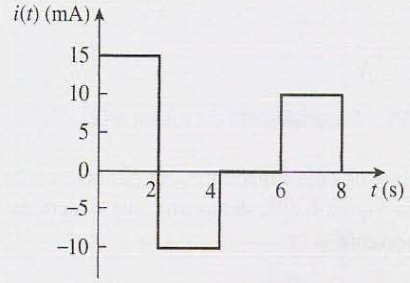


Figura 6.48 Esquema para o Problema 6.11.

6.12 Uma tensão igual a $30e^{-2.000t}$ V é medida entre uma associação paralela de um capacitor de 100 mF e um resistor de 12 Ω. Calcule a potência absorvida pela associação paralela.

6.13 Determine a tensão nos capacitores do circuito da Figura 6.49 em CC.

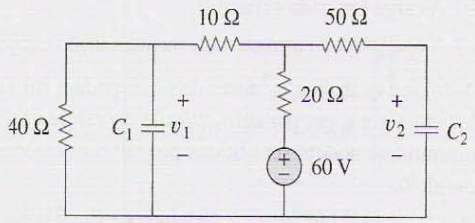


Figura 6.49 Esquema para o Problema 6.13.

• Seção 6.3 Capacitores em série e em paralelo

6.14 Capacitores de 20 pF e 60 pF conectados em série são associados em paralelo com capacitores de 30 pF e 70 pF conectados em série. Determine a capacitância equivalente.

6.15 Dois capacitores (25 μF e 75 μF) são ligados a uma fonte de 100 V. Determine a energia armazenada em cada capacitor se eles estiverem conectados em:

(a) Paralelo (b) Série

6.16 A capacitância equivalente nos terminais a-b no circuito da Figura 6.50 é 30 μF. Calcule o valor de C.

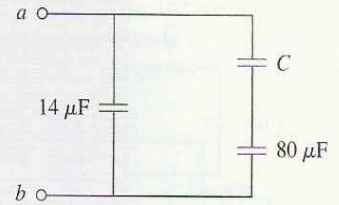


Figura 6.50 Esquema para o Problema 6.16.

6.17 Determine a capacitância equivalente para cada um dos circuitos da Figura 6.51.

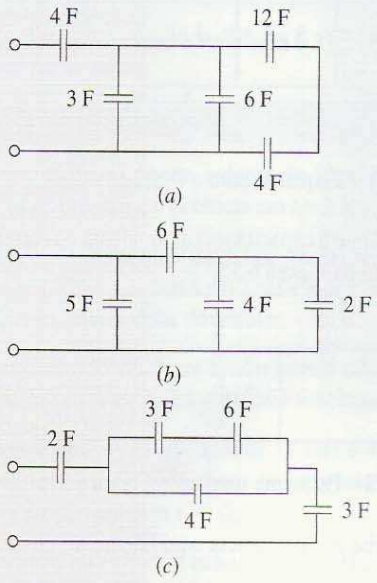


Figura 6.51 Esquema para o Problema 6.17.

6.18 Determine C_{eq} no circuito da Figura 6.52 se todos os capacitores forem de 4 μF.

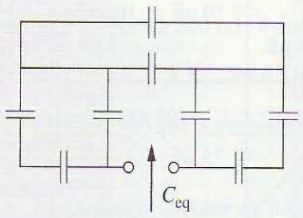


Figura 6.52 Esquema para o Problema 6.18.

6.19 Determine a capacitância equivalente entre os terminais a-b no circuito da Figura 6.53. Todas as capacitâncias se encontram em μF.

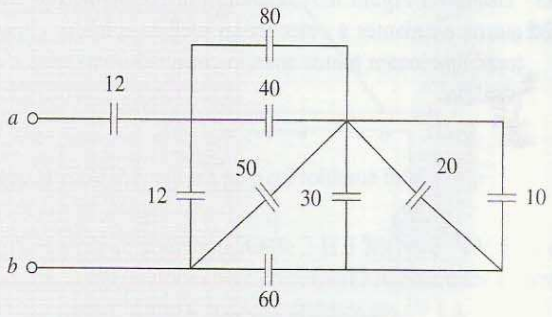


Figura 6.53 Esquema para o Problema 6.19.

6.20 Determine a capacitância equivalente nos terminais *a-b* do circuito da Figura 6.54.

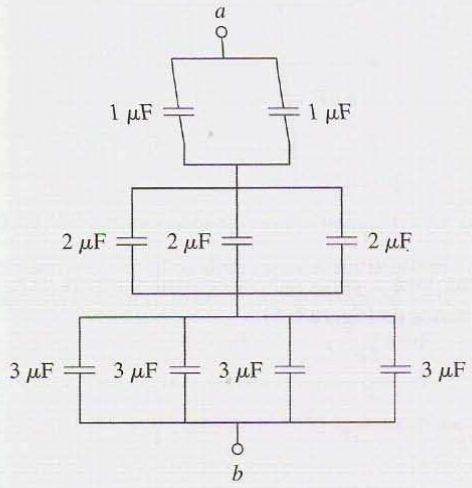


Figura 6.54 Esquema para o Problema 6.20.

6.21 Determine a capacitância equivalente nos terminais *a-b* do circuito da Figura 6.55.

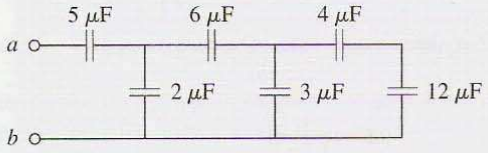


Figura 6.55 Esquema para o Problema 6.21.

6.22 Obtenha a capacitância equivalente do circuito da Figura 6.56.

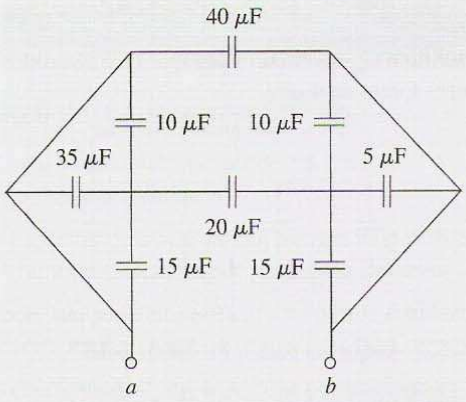


Figura 6.56 Esquema para o Problema 6.22.

6.23 Usando a Figura 6.57, elabore um problema que ajude outros estudantes a entenderem melhor como os capacitores funcionam juntos quando conectados em série e em paralelo.

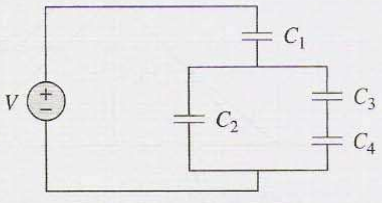


Figura 6.57 Esquema para o Problema 6.23.

6.24 Para o circuito da Figura 6.58, determine (a) a tensão em cada capacitor e (b) a energia armazenada em cada capacitor.

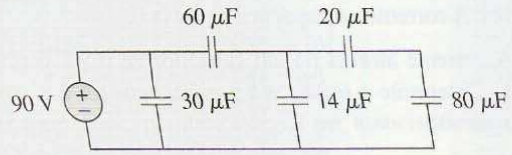


Figura 6.58 Esquema para o Problema 6.24.

6.25 (a) Demonstre que a regra de divisão de tensão para dois capacitores em série como na Figura 6.59*a* é

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_s, \qquad v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_s$$

supondo que as condições iniciais sejam zero.

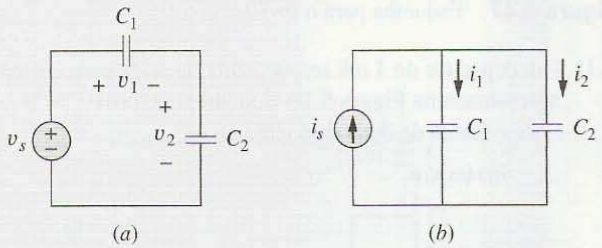


Figura 6.59 Esquema para o Problema 6.25.

(b) Para os dois capacitores em paralelo como indicados na Figura 6.59*b*, demonstre que a regra da divisão de corrente é

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i_s, \qquad i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i_s$$

supondo que as condições iniciais sejam zero.

6.26 Três capacitores, $C_1 = 5\ \mu F$, $C_2 = 10\ \mu F$ e $C_3 = 20\ \mu F$, estão conectados em paralelo e em uma fonte de 150 V. Determine:

(a) A capacitância total.

(b) A carga em cada capacitor.

(c) A energia total armazenada na associação em paralelo.

6.27 Dado que quatro capacitores de 4 μF podem ser conectados em série e em paralelo, calcule os valores máximo e mínimo que podem ser obtidos por tais associações série-paralelo.

* **6.28** Obtenha a capacitância equivalente do circuito apresentado na Figura 6.60.

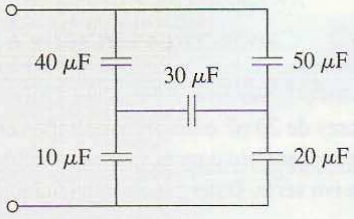


Figura 6.60 Esquema para o Problema 6.28.

* O asterisco indica um problema que constitui um desafio.

6.42 Se a forma de onda da tensão na Figura 6.67 for aplicada aos terminais de um indutor de 5 H, calcule a corrente através do indutor. Suponha $i(0) = -1$ A.

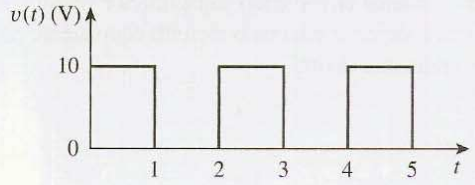


Figura 6.67 Esquema para o Problema 6.42.

6.43 A corrente em um indutor de 80 mH aumenta de 0 a 60 mA. Qual é a quantidade de energia armazenada no indutor?

*__6.44__ Um indutor de 100 mH é conectado em paralelo com um resistor de 2 kΩ. A corrente que passa pelo indutor é $i(t) = 50e^{-400t}$ mA. (a) Determine a tensão v_L no indutor. (b) Determine a tensão v_R no resistor. (c) A equação, a seguir, $v_R(t) + v_L(t) = 0$ é verdadeira? (d) Calcule a energia no indutor em $t = 0$.

6.45 Se a forma de onda da tensão na Figura 6.68 for aplicada a um indutor de 10 mH, determine a corrente $i(t)$. Suponha $i(0) = 0$.

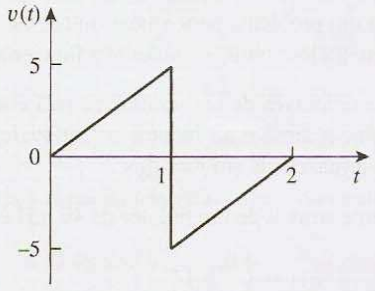


Figura 6.68 Esquema para o Problema 6.45.

6.46 Determine v_C, i_L e a energia armazenada no capacitor e indutor no circuito da Figura 6.69 em condições de CC.

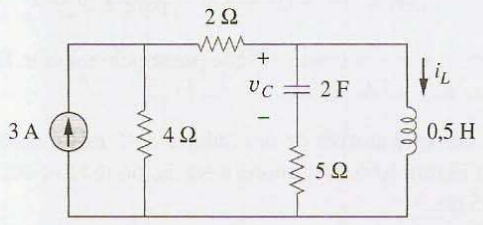


Figura 6.69 Esquema para o Problema 6.46.

6.47 Para o circuito da Figura 6.70, calcule o valor de R que e2d fará a energia armazenada no capacitor ser a mesma que aquela armazenada no indutor em CC.

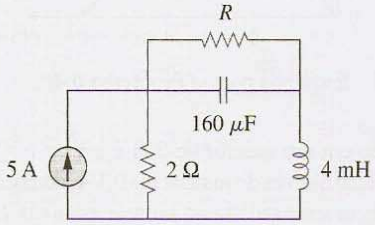


Figura 6.70 Esquema para o Problema 6.47.

6.48 Em condições CC de regime estacionário, determine i e v no circuito da Figura 6.71.

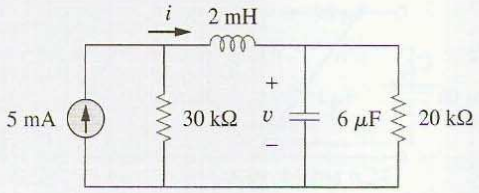


Figura 6.71 Esquema para o Problema 6.48.

• Seção 6.5 Indutores em série e em paralelo

6.49 Determine a indutância equivalente do circuito na Figura 6.72. Suponha que todos os indutores sejam de 10 mH.

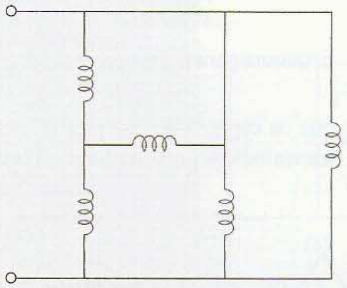


Figura 6.72 Esquema para o Problema 6.49.

6.50 Um circuito armazenador de energia é formado por indutores conectados em série de 16 mH e 14 mH associados em paralelo com indutores conectados em série de 24 mH e 36 mH. Calcule a indutância equivalente.

6.51 Determine a L_{eq} nos terminais a-b do circuito da Figura 6.73.

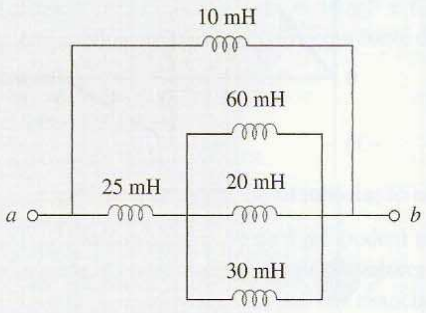


Figura 6.73 Esquema para o Problema 6.51.

6.52 Usando a Figura 6.74, elabore um problema para ajudar e2d outros estudantes a entenderem melhor como os indutores se comportam quando conectados em série e quando conectados em paralelo.

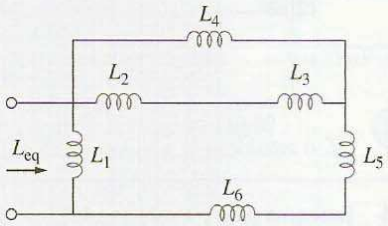


Figura 6.74 Esquema para o Problema 6.52.

6.53 Determine a L_{eq} nos terminais do circuito da Figura 6.75.

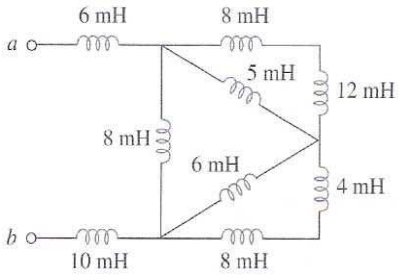


Figura 6.75 Esquema para o Problema 6.53.

6.54 Determine a indutância equivalente olhando pelos terminais do circuito da Figura 6.76.

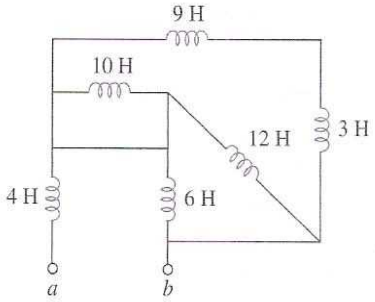


Figura 6.76 Esquema para o Problema 6.54.

6.55 Determine a L_{eq} em cada um dos circuitos da Figura 6.77.

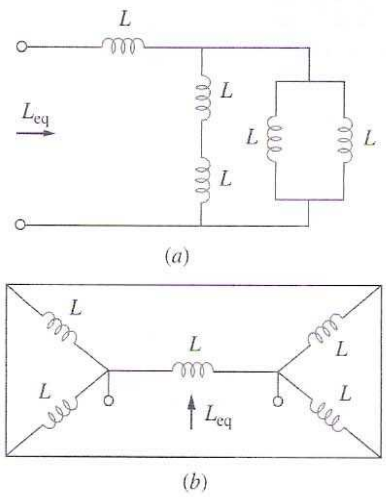


Figura 6.77 Esquema para o Problema 6.55.

6.56 Determine a L_{eq} no circuito da Figura 6.78.

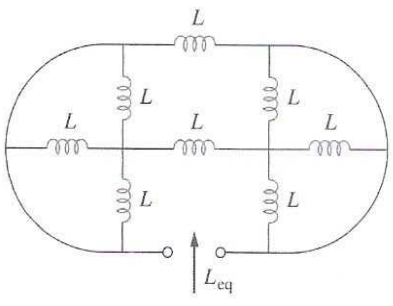


Figura 6.78 Esquema para o Problema 6.56.

***6.57** Determine a L_{eq} que pode ser usada para representar o circuito indutivo da Figura 6.79 nos terminais.

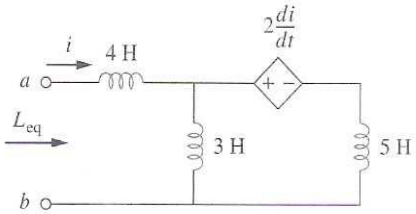


Figura 6.79 Esquema para o Problema 6.57.

6.58 A forma de onda da corrente na Figura 6.80 percorre um indutor de 3 H. Esboce a tensão através do indutor ao longo do intervalo $0 < t < 6$ s.

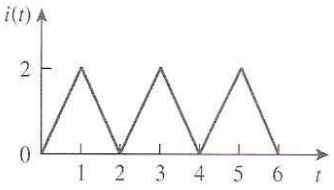


Figura 6.80 Esquema para o Problema 6.58.

6.59 (a) Para dois indutores em série como aqueles mostrados na Figura 6.81*a*, demonstre que o princípio da divisão da tensão é

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_s, \qquad v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v_s$$

supondo que as condições iniciais sejam zero.

(b) Para dois indutores em paralelo como aqueles apresentados na Figura 6.81*b*, demonstre que o princípio da divisão da corrente é

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_s, \qquad i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_s$$

supondo que as condições iniciais sejam zero.

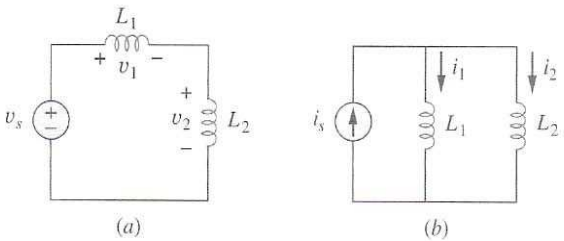


Figura 6.81 Esquema para o Problema 6.59.

6.60 No circuito da Figura 6.82, $i_o(0) = 2$ A. Determine $i_o(t)$ e $v_o(t)$ para $t > 0$.

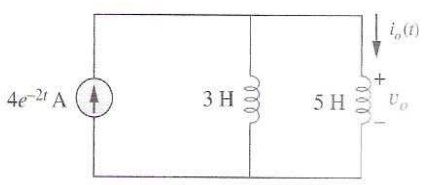


Figura 6.82 Esquema para o Problema 6.60.

6.61 Considere o circuito da Figura 6.83. Determine: (a) L_{eq}, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, se $i_s = 3e^{-t}$ mA; (b) $v_o(t)$; (c) a energia armazenada no indutor de 20 mH em $t = 1$ s.

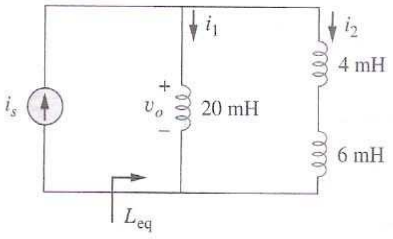


Figura 6.83 Esquema para o Problema 6.61.

6.62 Considere o circuito da Figura 6.84. Dado que $v(t) = 12e^{-3t}$ mV para $t > 0$ e $i_1(0) = -10$ mA, determine: (a) $i_2(0)$, (b) $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

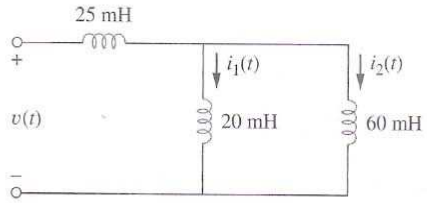


Figura 6.84 Esquema para o Problema 6.62.

6.63 No circuito da Figura 6.85, esboce v_o.

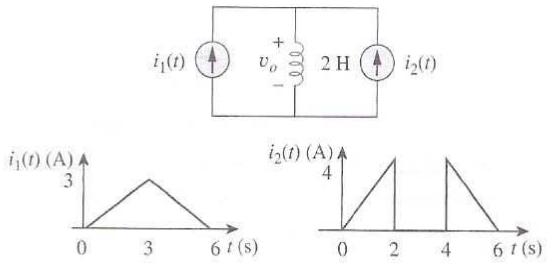


Figura 6.85 Esquema para o Problema 6.63.

6.64 A chave na Figura 6.86 se encontra na posição A há muito tempo. Em $t = 0$, a chave passa da posição A para B e é do tipo abre-fecha, de modo que não haja interrupção na corrente do indutor. Determine:

(a) $i(t)$ para $t > 0$.

(b) v *logo após* a chave ter passado para a posição B.

(c) $v(t)$ bem depois de a chave já estar na posição B.

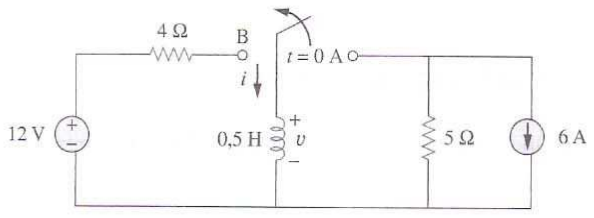


Figura 6.86 Esquema para o Problema 6.64.

6.65 Os indutores na Figura 6.87 são inicialmente carregados e conectados à caixa preta em $t = 0$. Se $i_1(0) = 4$ A, $i_2(0)$ –2 A e $v(t) = 50e^{-200t}$ mV para $t \geq 0$, determine:

(a) A energia inicialmente armazenada em cada indutor.

(b) A energia total liberada para a caixa preta de $t = 0$ a $t = \infty$.

(c) $i_1(t)$ e $i_2(t)$, $t \geq 0$

(d) $i(t)$, $t \geq 0$

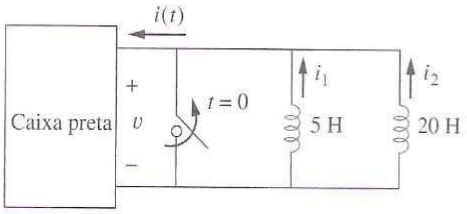


Figura 6.87 Esquema para o Problema 6.65.

6.66 A corrente $i(t)$ através de um indutor de 20 mH é igual, em magnitude, à tensão nele para todos os valores de tempo. Se $i(0) = 2$ A, determine $i(t)$.

• Seção 6.6 Aplicações

6.67 Um integrador com amplificadores operacionais possui $R = 50$ kΩ e $C = 0{,}04$ μF. Se a tensão de entrada for $v_i = 10$ sen $50t$ mV, obtenha a tensão de saída.

6.68 Uma tensão CC de 10 V é aplicada a um integrador com $R = 50$ kΩ, $C = 100$ μF em $t = 0$. Quanto tempo levará para o amplificador operacional saturar se as tensões de saturação forem +12 V e –12 V? Suponha que a tensão inicial no capacitor seja zero.

6.69 Um integrador com AOP e $R = 4$ MΩ e $C = 1$ μF tem a forma de onda mostrada na Figura 6.88. Desenhe a forma de onda de saída.

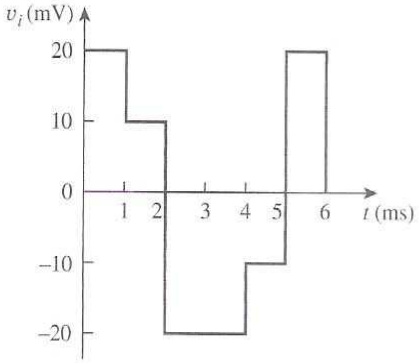


Figura 6.88 Esquema para o Problema 6.69.

6.70 Usando um único amplificador operacional, um capacitor e resistores de 100 kΩ ou menos, desenhe um circuito para implementar

$$v_o = -50 \int_0^t v_i(t)\, dt$$

Suponha $v_o = 0$ em $t = 0$.

6.71 Demonstre como você usaria um único AOP para gerar

$$v_o = -\int_0^t (v_1 + 4v_2 + 10v_3)dt$$

Se o capacitor integrador for $C = 2$ μF, obtenha os valores dos demais componentes.

6.72 Em $t = 1{,}5$ ms, calcule v_o devido aos integradores em cascata da Figura 6.89. Suponha que os integradores sejam reiniciados em 0 V no instante $t = 0$.

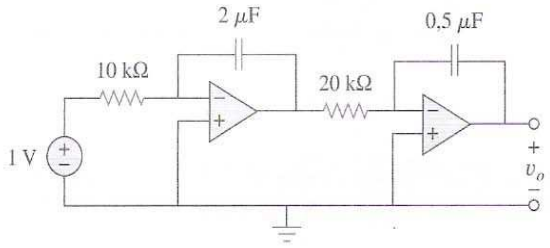


Figura 6.89 Esquema para o Problema 6.72.

6.73 Demonstre que o circuito da Figura 6.90 é um integrador não inversor.

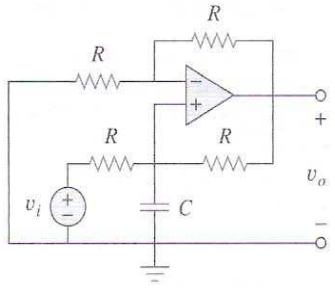
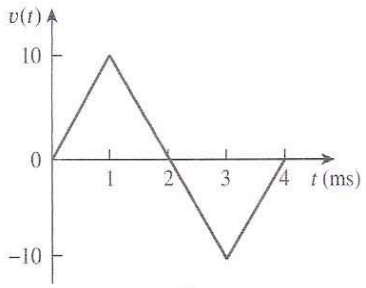
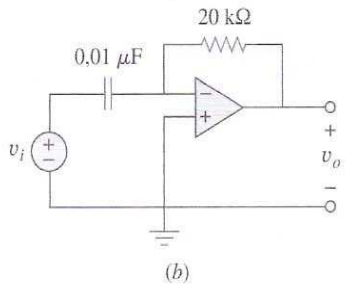


Figura 6.90 Esquema para o Problema 6.73.

6.74 A forma de onda triangular da Figura 6.91*a* é aplicada à entrada do diferenciador com amplificadores operacionais da Figura 6.91*b*. Desenhe a saída.



(*a*)



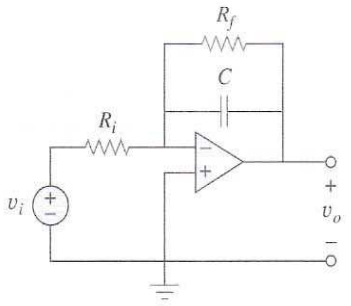
(*b*)

Figura 6.91 Esquema para o Problema 6.74.

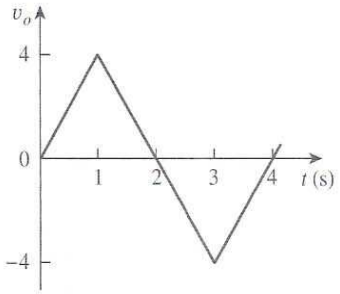
6.75 Um diferenciador com amplificadores operacionais possui $R = 250$ kΩ e $C = 10$ μF. A tensão de entrada é uma rampa $r(t) = 12t$ mV. Determine a tensão de saída.

6.76 Uma forma de onda de tensão tem as seguintes características: uma inclinação positiva de 20 V/s por 5 ms seguida por uma inclinação negativa de 10 V/s por 10 ms. Se a forma de onda for aplicada a um diferenciador com $R = 50$ kΩ, $C = 10$ μF, esboce a forma de onda da saída.

***6.77** A saída do circuito v_o com AOP da Figura 6.92*a* é apresentada na Figura 6.92*b*. Seja $R_i = R_f = 1$ MΩ e $C = 1$ μF. Determine a forma de onda da tensão de entrada e esboce-a.



(*a*)



(*b*)

Figura 6.92 Esquema para o Problema 6.77.

6.78 Projete um computador analógico para simular

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = 10 \operatorname{sen} 2t$$

onde $v_o(0) = 2$ e $v'_o(0) = 0$.

6.79 Projete um circuito para computador analógico para resolver a seguinte equação diferencial ordinária.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = f(t)$$

onde $y(0) = 1$ V.

6.80 A Figura 6.93 apresenta um computador analógico projetado para solucionar uma equação diferencial. Supondo que $f(t)$ seja conhecida, monte a equação para $f(t)$.

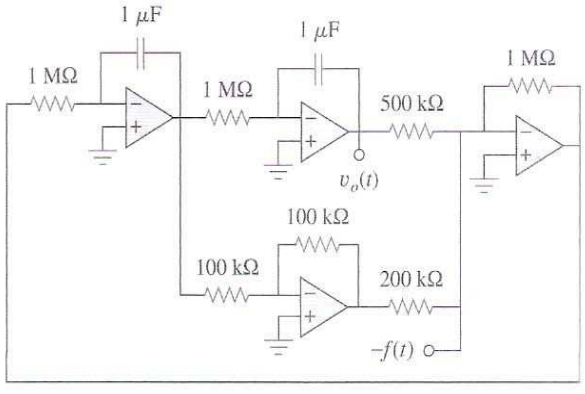


Figura 6.93 Esquema para o Problema 6.80.

6.81 Projete um computador analógico para simular a seguinte e2d equação:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5v = -2f(t)$$

6.82 Projete um circuito com amplificador operacional tal que e2d

$$v_o = 10v_s + 2\int v_s dt$$

onde v_s e v_o são, respectivamente, a tensão de entrada e a de saída.

Problemas abrangentes

6.83 Seu laboratório tem disponível um grande número de e2d capacitores de 10 μF na faixa de 300 V. Para projetar um banco capacitivo de 40 μF na faixa dos 600 V, quantos capacitores de 10 μF são necessários e como você os interligaria?

6.84 Um indutor de 8 mH é usado em um experimento de potência de fusão. Se a corrente através do indutor for $i(t) = 5\ \text{sen}^2\ \pi\ t$ mA, $t > 0$, determine a potência liberada para o indutor e a energia armazenada nele em $t = 0{,}5$ s.

6.85 Um gerador de onda quadrada produz uma forma de onda de tensão mostrada na Figura 6.94*a*. Que tipo de componente de circuito é necessário para converter a forma de onda da tensão para a forma de onda triangular da corrente exposta na Figura 6.94*b*? Calcule o valor do componente, supondo que ele esteja inicialmente descarregado.

6.86 Um motor elétrico pode ser modelado como uma associação em série entre um resistor de 12 Ω e um indutor de 200 mH. Se uma corrente $i(t) = 2te^{-10t}$ A passa através da associação em série, determine a tensão nesta associação.

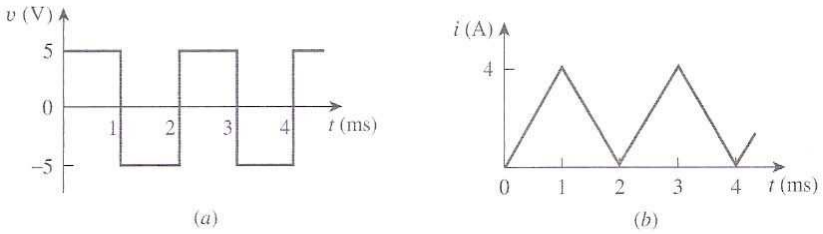


Figura 6.94 Esquema para o Problema 6.85.